Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(8 Punkte)*

   (a) Laut Vorlesung ist $(\mathbb{Z}_p \backslash \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe genau dann, wenn p eine Primzahl ist. Nun wollen wir ein analoges Ergebnis für $\mathbb{Z}_m$ für beliebige $m \in \mathbb{N}$ zeigen. Beweisen Sie:

   $$\left\{\overline{a} \in \mathbb{Z}_m, \mid \exists \overline{b} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}\right\} = \{\overline{a} \in \mathbb{Z}_m \mid 0 < a < m, \mathrm{ggT}(a, m) = 1\}.$$

   Hinweis: Benutzen Sie Hausaufgabe 1(c) von Blatt 5.

   (b) Zeigen Sie, dass die Menge $(\mathbb{Z}_m)^* := \{\overline{a} \in \mathbb{Z}_m \mid 0 < a < m, \mathrm{ggT}(a, m) = 1\}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ eine abelsche Gruppe bezüglich der Verknüpfung $\cdot$ ist. Sie heißt die *Einheitengruppe* des Ringes $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$.

   (c) In der folgenden Tabelle sind für $m = 9$ in der oberen Zeile die Zahlen $a \in \{1, 2, ..., m - 1\}$ mit $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$ aufgelistet und in der unteren Zeile die zugehörigen Zahlen $b \in \{1, 2, ..., m - 1\}$, für welche $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}$ gilt (oder, anders formuliert, für welche m Teiler von $ab - 1$ ist).

   $m = 9$:

1	2	4	5	7	8
1	5	7	2	4	8

   Geben Sie die analogen Tabellen für $m = 10$, $m = 11$ und $m = 15$ an.

2. *(4 Punkte)* Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Berechnen Sie alle $w = x + yi \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = z$. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

   (a) Lösen Sie die Gleichung $(x + yi)^2 = a + bi$ auf. Dies ergibt zwei Gleichungen für x und y.

   (b) Substituieren Sie eine Variable (zum Beispiel y), dies liefert eine Gleichung vierten Grades in x.

   (c) Durch eine weitere Substitution erhält man hieraus eine Gleichung zweiten Grades, welche auf einfache Weise lösbar ist.

3. *(4 points)*

   (a) Determine real part, imaginary part and absolute value of the complex numbers listed below.

   $$z_1 := \frac{1}{i}, \quad z_2 := -\frac{1 - i}{2 + i} - \frac{3 + i}{4}, \quad z_3 := \frac{(1 + i)^2}{2} - \frac{6 + 5i}{i^3}, \quad z_4 := 3e^{2\pi i/8}.$$

   (b) Determine the absolute value and the argument (i.e, $|z|$ and $\alpha \in [0, 2\pi)$ such that $z = |z|e^{i\alpha} = |z|(\cos\alpha + i \sin\alpha)$) of the following complex numbers,

   $$z_5 := 1 + i\sqrt{3}, \quad z_6 := (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{19}.$$

4. *(4 Punkte)* Calculate all zeros of the polynomial $f = x^5 - 3x^2 - 64x - 24$. Hint: You have to divide f by $x^2 + 8$.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 21/22. November 2016, in den Übungen