Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(5 Punkte)* Das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathrm{kgV}(a,b)$ zweier Zahlen $a,b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ist die kleinste natürliche Zahl, die von a und b geteilt wird. Der größte gemeinsame Teiler $\mathrm{ggT}(a,b)$ ist die größte natürliche Zahl, die a und b teilt.

   (a) Zeigen Sie, dass es zu jeder Untergruppe $U \neq \{0\}$ von $(\mathbb{Z},+)$ ein eindeutiges $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $U = m\mathbb{Z}$ ist (Hinweis: Studieren Sie $\min(\mathbb{N} \cap U)$ und verwenden Sie Division mit Rest in $\mathbb{Z}$).

   (b) Es seien $a,b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie
   $$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mathrm{kgV}(a,b)\mathbb{Z}.$$

   (c) Es seien $a,b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, dass es k und $l \in \mathbb{Z}$ gibt mit
   $$ka + lb = \mathrm{ggT}(a,b).$$
   (Hinweis: betrachten Sie die Teilmenge $\{ka+lb \mid k,l \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathbb{Z}$, zeigen Sie, dass diese eine Untergruppe ist und benutzen Sie die Tatsache, dass jeder gemeinsame Teiler von a und b auch ein Teiler von $\mathrm{ggT}(a,b)$ ist.)

2. *(6 Punkte)*

   (a) Sei G eine Gruppe und $\mathrm{Aut}(G)$ die Menge der Automorphismen von G, das heißt die Menge der Isomorphismen von G in sich selbst. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(G)$ eine Gruppe bezüglich der Komposition bildet.

   (b) Sei G eine Gruppe. Zu $g \in G$ sei γ_g die folgende Abbildung
   $$\gamma_g : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$$
   Zeigen Sie, dass $\gamma_g \in \mathrm{Aut}(G)$.

   (c) Betrachten Sie die Abbildung
   $$\Gamma : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(G) \\ g & \longmapsto & \gamma_g \end{array}$$
   Zeigen Sie, dass Γ ein Homomorphismus von Gruppen ist.

   (d) *(Zusatzaufgabe, 2 Extra-Punkte)* Sei H eine Gruppe und $U < H$ eine Untergruppe. Dann heißt U ein Normalteiler in H, falls für alle $h \in H$ gilt, dass $hUh^{-1} \subset U$ ist, hierbei sei
   $$hUh^{-1} := \left\{huh^{-1} \,|\, u \in U\right\}$$
   Zeigen Sie, dass das Bild von Γ ein Normalteiler in $\mathrm{Aut}(G)$ ist.

3. *(4 Punkte)* Die Verknüpfungstafeln im Ring $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ sind:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

   Wir haben die Zahlen $0,\ldots,4$ statt der Klassen $[0],\ldots,[4]$ geschrieben, um die Übersicht zu verbessern. Geben Sie die Verknüpfungstafeln der Addition und der Multiplikation in den Ringen $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ und $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ an (wobei Sie auch die Klammern, welche die Klassen darstellen, weglassen können). Welcher der beiden Ringe $\mathbb{Z}_6$ und $\mathbb{Z}_7$ ist ein Körper ? Geben Sie bei dem der beiden Ringe, welcher kein Körper ist, eine Begründung dafür, dass er kein Körper ist, an, welche sich direkt aus der Verknüpfungstabelle ablesen lässt.

Bitte wenden !!!

4. *(5 points)*

(a) We consider the set of maps $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Show that $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ is a ring when equipped with pointwise addition and multiplication.

(b) An element f of a ring R is called zerodivisor („Nullteiler“) if there exists a $g \in R \backslash \{0\}$ such that $f \cdot g = 0$. Find a zerodivisor in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(c) A mapping of the form

$$\begin{array}{rcrcl} p & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \end{array}$$

where $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ is called a real polynomial in one variable. Show that the set $\mathbb{R}[x]$ of real polynomials in one variable forms a subring of $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, i.e., $(\mathbb{R}[x], +) < (\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$ and the multiplication preserves the subset $\mathbb{R}[x] \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(d) Show that the ring $\mathbb{R}[x]$ has no zerodivisors, such rings are called integral domain („nullteilerfreie Ringe“).

(e) Prove that for any set X and any ring R, the set

$$\mathrm{Abb}(X, R) := \{f : X \to R\}$$

carries the structure of a ring with respect to pointwise addition and multiplication.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 14./15. November 2016, in den Übungen