Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(3 points)* Let M be an arbitrary set and denote by $\mathcal{P}(M)$ the set of all subsets of M. Recall the definition of the *symmetric difference*: for subsets $A, B \subset M$, let

$$A \,\Delta\, B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Show that the pair $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ is an abelian group.

2. *(6 Punkte)* Beweisen Sie mit Hilfe des Prinzips des vollständigen Induktion, dass die folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten.

   (a) $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$,

   (b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$,

   (c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. *(6 Punkte)* In der Vorlesung wurde für eine Menge M die Gruppe der Permutationen $(S(M), \circ)$ eingeführt. Wir definieren $S_n := S(\{1, \ldots, n\})$ und nennen $(S_n, \circ)$ die symmetrische Gruppe (der Menge $\{1, \ldots, n\}$).

   (a) Bestimmen Sie alle Elemente der symmtrischen Gruppen S_1, S_2 und S_3.

   (b) Für eine Gruppe $(G, *)$ mit neutralem Element e und für ein Element $g \in G$ heisst

$$o(g) := \min(k \in \mathbb{N} \mid \underbrace{g * \ldots * g}_{k-\text{mal}} = e)$$

   die Ordnung von g (insbesondere ist also $o(e) = 1$). Bestimmen Sie die Ordnungen der Gruppenelemente von S_1, S_2 und S_3.

4. *(5 Punkte)* Wir definieren die Teilmenge $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ von $\mathbb{R}$ als

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \left\{ a + b \cdot \sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 1./2. November 2016, in den Übungen