Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(4 Punkte)* Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, K)$. Zeigen Sie, dass gilt:
   (a) ${}^t(A^\sharp) = ({}^tA)^\sharp$,
   (b) $(A \cdot B)^\sharp = B^\sharp A^\sharp$,
   (c) $\det(A^\sharp) = (\det(A))^{n-1}$,
   (d) $(A^\sharp)^\sharp = (\det(A))^{n-2} A$.

2. *(4 Punkte)*
   (a) Berechnen Sie die Determinate der Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 3 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
   einmal durch Entwicklung nach der ersten, dann durch Entwicklung nach der dritten Zeile.
   (b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix
$$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. *(6 Punkte)* Im Vektorraum K^2 über dem Körper K nennt man für zwei Punkte $a \neq 0$ und p aus K^2 die Menge $\{p + \alpha a : \alpha \in K\}$ eine Gerade.
   (a) Zeigen Sie: Zu zwei verschiedenen Punkten a und b des K^2 gibt es genau eine Gerade durch a und b, d.h. genau eine Gerade, die a und b enthält.
   (b) Zeigen Sie: Die Gerade durch a und b ist gleich $\{\alpha a + \beta b : \alpha, \beta \in K,\ \alpha + \beta = 1\}$.
   (c) Beweisen Sie: Sind a, b verschiedene Punkte des K^2, dann liegt ein $x \in K^2$ genau dann auf der Geraden durch a und b, wenn gilt
$$\det \begin{pmatrix} x & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$
   (d) Sind ω_1, ω_2, ρ aus K, so heißt die Menge der $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in K^2$ mit
$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 + \rho = 0$$
   ein Kreis, falls sie mindestens zwei verschiedene Punkte enthält.
   Zeigen Sie, dass drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ des K^2 stets auf einem Kreis liegen, nämlich dem durch
$$\det \begin{pmatrix} \xi_1^2 + \xi_2^2 & \xi_1 & \xi_2 & 1 \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 & \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 & \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 & \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$
   beschriebenen.

Bitte wenden !!!

4. *(2 Punkte)* Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_0 & - & 6x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 8 \\ -x_0 & + & 8x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 12 \\ -x_0 & + & 5x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 3 \\ -9x_0 & + & 36x_1 & + & 13x_2 & - & 24x_3 & = & 6 \end{array}$$

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 30./31. Januar 2017, in den Übungen