Hausaufgaben zur Linearen Algebra

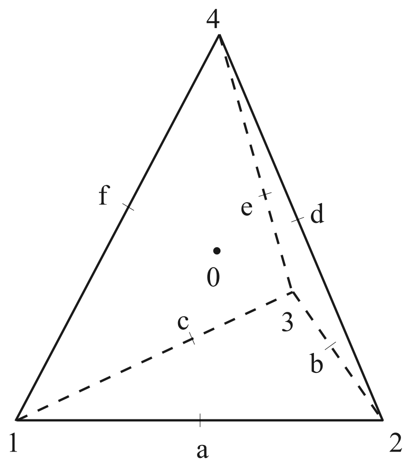
1. *(4 Punkte)*

   (a) Stellen Sie die folgenden Permutationen aus S_6 als Produkt von Transpositionen dar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   (b) Berechnen Sie die Verknüpfungstabelle von S_3.

2. *(6 Punkte)* T sei ein gleichseitiges Tetraeder im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt 0, Ecken $1, 2, 3, 4$ und Kantenmittelpunkten a, b, c, d, e, f wie in der Skizze.



Wir betrachten die Elemente der alternierenden Gruppe $A_4 \lhd S_4$. Wie viele Elemente hat A_4? Schreiben Sie alle Elemente von A_4 auf. Diese Elemente werden durch Drehungen von T realisiert. Beschreiben Sie für jedes Element von A_4, durch welche Drehung es realisiert wird. Beispiel: Das Element

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in A_4$$

wird durch eine Drehung an der Achse $\vec{ae}$ um den Winkel π realisiert.

3. *(4 points)*

   (a) Show the following identity:

$$\det \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = 1.$$

   (b) Show that the VANDERMONDE determinant satisfies

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

   (Hint: Use induction over n).

Bitte wenden !!!

4. *(6 Punkte)*

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

invertierbar?

(b) Für welche $\mu, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \mu & \mu & \mu & \mu & \mu \\ 1 & i & -1 & -i & 1 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \lambda_1^4 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \lambda_2^4 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \lambda_3^4 \end{pmatrix}$$

invertierbar?

(c) Beweisen Sie, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^{10} + 14x^9 + 7x^3 & 12x^9 + 4x^3 + 3x + 1 & 44x^7 - 3ix^5 - 6i \\ x^9 + x^5 - 213x^2 & 97x^{10} & 3x - 1255 \\ x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 & 99 & 111x^{10} - x^9 + 13x^5 - 8 \end{pmatrix}$$

für höchstens 30 verschiedene Werte von $x \in \mathbb{C}$ nicht invertierbar ist.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 23./24. Januar 2017, in den Übungen