Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik
Christian Sevenheck, Holger Langenau, Frank Göring

Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(6 Punkte)* Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen.

   (a)
$$\begin{pmatrix} -10 & 4 & 12 \\ -5 & 11 & 3 \\ -15 & 3 & 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -9 & 2 & 11 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 & 15 \\ -5 & 1 & 2 & -9 \\ -1 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   (b) Invertieren Sie die folgenden Matrizen.
$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -2 & 11 & -6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 & 4 & 12 \\ -5 & 11 & 3 \\ -15 & 3 & 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 12 & 4 & -4 & -8 \\ 9 & -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

2. *(4 Punkte)* Sei (wie auf dem letzten Blatt) die Matrix
$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 4, \mathbb{R})$$
gegeben, welche eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto M \cdot x$ definiert. Finden Sie Basen $\mathcal{A}'$ von $\mathbb{R}^4$ und $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer die Abbildung φ durch die Matrix
$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
beschrieben wird.

3. *(6 points)* Consider the map
$$\begin{array}{rccc} \_ \cdot t : & \mathbb{C}[t]_{\leq 3} & \longrightarrow & \mathbb{C}[t]_{\leq 4} \\ & p & \longmapsto & p \cdot t \end{array}$$
and the bases
$$\mathcal{B}_1 := (1, t, t^2, t^3, t^3) \text{ und } \mathcal{B}_2 := (1, t+1, (t-2)^2, t^3 + t)$$
of the complex vector space $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ as well as the bases
$$\mathcal{B}_3 := (1, t, t^2 + t + 1, (t+1)^3, t^4 + t^2) \text{ und } \mathcal{B}_4 := (1, t, t^2, t^3, t^4)$$
of $\mathbb{C}[t]_{\leq 4}$. Compute all maps occuring in the following diagram.
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^4 \arrow[rrr, "{}_{\mathcal{B}_3}(_\cdot t)_{\mathcal{B}_1}"] \arrow[dd, "{}_{\mathcal{B}_2}T_{\mathcal{B}_1}"'] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{B}_1}"] & & & \mathbb{C}^5 \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{B}_3}"'] \arrow[dd, "{}_{\mathcal{B}_4}T_{\mathcal{B}_3}"] \\
& \mathbb{C}[t]_{\leq 3} \arrow[r] & \mathbb{C}[t]_{\leq 4} & \\
\mathbb{C}^4 \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{B}_2}"'] \arrow[rrr, "{}_{\mathcal{B}_4}(_\cdot t)_{\mathcal{B}_2}"'] & & & \mathbb{C}^5 \arrow[ul, "\Phi_{\mathcal{B}_4}"]
\end{tikzcd}$$

Bitte wenden !!!

4. *(4 Punkte)*

(a) Wir betrachten erneut die folgenden zwei Endomorphismen des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathbb{C}[t]$

$$\begin{array}{rccc} D: & \mathbb{C}[t] & \to & \mathbb{C}[t] \\ & p & \mapsto & p' \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccc} \_ \cdot t: & \mathbb{C}[t] & \to & \mathbb{C}[t] \\ & p & \mapsto & p \cdot t. \end{array}$$

Zeigen Sie, dass $D \circ (\_ \cdot t) - (\_ \cdot t) \circ D = \mathrm{id}_{\mathbb{C}[t]}$ gilt.

(b) Sei nun V ein beliebiger $\mathbb{C}$-Vektorraum und P, Q Endomorphismen von V. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$P \circ Q - Q \circ P = \mathrm{id}_V$$

nur gelten kann, falls $\dim(V) = \infty$ ist (Hinweis: Verwenden Sie Blatt 10, Aufgabe 3).

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 16./17. Januar 2017, in den Übungen