

Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. (6 Punkte) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen.

(a)

$$\begin{pmatrix} -10 & 4 & 12 \\ -5 & 11 & 3 \\ -15 & 3 & 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -9 & 2 & 11 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 & 15 \\ -5 & 1 & 2 & -9 \\ -1 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Invertieren Sie die folgenden Matrizen.

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -2 & 11 & -6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 & 4 & 12 \\ -5 & 11 & 3 \\ -15 & 3 & 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 12 & 4 & -4 & -8 \\ 9 & -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

2. (4 Punkte) Sei (wie auf dem letzten Blatt) die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{R})$$

gegeben, welche eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto M \cdot x$ definiert. Finden Sie Basen \mathcal{A}' von \mathbb{R}^4 und \mathcal{B}' von \mathbb{R}^3 , bezüglich derer die Abbildung φ durch die Matrix

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

3. (6 points) Consider the map

$$\begin{aligned} \cdot t : \mathbb{C}[t]_{\leq 3} &\longrightarrow \mathbb{C}[t]_{\leq 4} \\ p &\longmapsto p \cdot t \end{aligned}$$

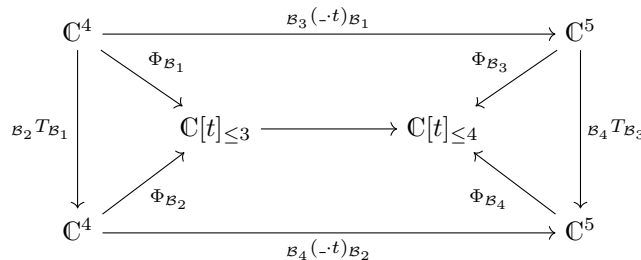
and the bases

$$\mathcal{B}_1 := (1, t, t^2, t^3, t^3) \text{ und } \mathcal{B}_2 := (1, t + 1, (t - 2)^2, t^3 + t)$$

of the complex vector space $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ as well as the bases

$$\mathcal{B}_3 := (1, t, t^2 + t + 1, (t + 1)^3, t^4 + t^2) \text{ und } \mathcal{B}_4 := (1, t, t^2, t^3, t^4)$$

of $\mathbb{C}[t]_{\leq 4}$. Compute all maps occurring in the following diagram.



4. (4 Punkte)

(a) Wir betrachten erneut die folgenden zwei Endomorphismen des \mathbb{C} -Vektorraumes $\mathbb{C}[t]$

$$D: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[t] & \rightarrow & \mathbb{C}[t] \\ p & \mapsto & p' \end{array}$$

und

$$-\cdot t: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[t] & \rightarrow & \mathbb{C}[t] \\ p & \mapsto & p \cdot t. \end{array}$$

Zeigen Sie, dass $D \circ (-\cdot t) - (-\cdot t) \circ D = \text{id}_{\mathbb{C}[t]}$ gilt.

(b) Sei nun V ein beliebiger \mathbb{C} -Vektorraum und P, Q Endomorphismen von V . Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$P \circ Q - Q \circ P = \text{id}_V$$

nur gelten kann, falls $\dim(V) = \infty$ ist (Hinweis: Verwenden Sie Blatt 10, Aufgabe 3).

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

<https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php>

zu finden.

Abgabe bis 16./17. Januar 2017, in den Übungen