Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(3 Punkte)* Die Matrix
$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$
definiert eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, M ist die Darstellung von φ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ bezüglich der Basen $\mathcal{A} := (g_1, g_2, g_3, g_4)$ von $\mathbb{R}^4$ und $\mathcal{B} := \{h_1, h_2, h_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ mit
$$g_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, g_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g_4 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$
und
$$h_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, h_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, h_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. *(8 Punkte)* Wir betrachten den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}[t]_{\leq 5}$ der komplexen Polynome vom Grad kleiner oder gleich fünf. Bezüglich der Basis $\mathcal{B}_0 = \{1, t, t^2, t^3, t^4, t^5\}$ ist die darstellende Matrix ${}_{\mathcal{B}_0}D_{\mathcal{B}_0}$ der Ableitungsabbildung $D : \mathbb{C}[t]_{\leq 5} \to \mathbb{C}[t]_{\leq 5}$, $p \mapsto p'$ leicht zu finden, vgl. Blatt 9, Aufgabe 2b.

   (a) Wie kann man am Koordinatenvektor eines Polynoms $p \in \mathbb{C}[t]_{\leq 5}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_0$ die Multiplizität $\mu(p, 0)$ des Polynoms im Punkt 0 ablesen? Ist die Multiplizität $\mu(p, 1)$ ebenfalls einfach abzulesen?

   (b) Nun interessieren wir uns für Polynome mit Nullstelle 1. Zeigen Sie, dass
$$\mathcal{B}_1 = \{1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3, (t-1)^4, (t-1)^5\}$$
eine Basis von $\mathbb{C}[t]_{\leq 5}$ ist. Was ist ihr Vorteil? Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen ${}_{\mathcal{B}_1}T_{\mathcal{B}_0}$ und ${}_{\mathcal{B}_0}T_{\mathcal{B}_1}$ sowie die darstellende Matrix ${}_{\mathcal{B}_1}D_{\mathcal{B}_1}$ der Ableitungsabbildung D bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$.

   (c) Berechnen Sie durch Matrizenmultiplikation und einfaches Ablesen die Multiplizitäten $\mu(p_i, 1)$, $i = 1, 2$ der Polynome $p_1(t) := t^4 - (4+i)t^3 + (5+4i)t^2 - (2+5i)t + 2i$ und $p_2(t) := t^5 - \frac{9}{2}t^4 + 8t^3 - 7t^2 + 3t - \frac{1}{2}$ im Punkt $t = 1$.

   (d) Zeigen Sie, dass die Verschiebungsabbildung V, die in einem Polynom t gegen $t-1$ ersetzt, ein Endomorphismus des Vektorraumes $\mathbb{C}[t]_{\leq 5}$ ist. Berechnen Sie durch Multiplikation und Invertieren von bereits bekannten Matrizen die darstellenden Matrizen ${}_{\mathcal{B}_0}V_{\mathcal{B}_0}$ und ${}_{\mathcal{B}_1}V_{\mathcal{B}_1}$ dieses Endomorphismus bezüglich der Basen $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}_1$.

   (e) Zeigen Sie, dass die beiden darstellenden Matrizen der Ableitungsabbildung und der Verschiebungsabbildung bezüglich beliebiger Basen von $\mathbb{C}[t]_{\leq 5}$ kommutieren, d.h., dass für eine beliebige Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}[t]_{\leq 5}$ gilt $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(V) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(V) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D)$.

Bitte wenden !!!

3. *(2 points)* Let k be any field and let $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n, k)$ be a quadratic matrix. Define the *trace* of A as

$$\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

i.e., the trace is the sum of the diagonal elements of A. Show that

(a) $\mathrm{Tr}(E_n) = n$, where E_n is the unit matrix in $\mathrm{M}(n \times n, k)$,

(b) $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$ for all $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, k)$,

(c) $\mathrm{Tr}(A \cdot B) = \mathrm{Tr}(B \cdot A)$ for all $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, k)$.

4. *(3 points)* Let V be a k-vector space and let $F : V \to V$ be an endomorphism of V satisfying $F^2 = F$. Show that there are linear subspaces U, W of V, such that $V = U \oplus W$, $F(W) = 0$ and such that $F(u) = u$ holds true for all $u \in U$.

5. *(4 Punkte)*

(a) Wieviele Elemente hat $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$?
Hinweise: eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{F}_p)$ ist invertierbar, wenn ihre Zeilen $v_i := (a_{i1}, ..., a_{in})$, $i = 1, 2, ..., n$, linear unabhängig sind. Wenn man zuerst v_1 wählt, wieviele Möglichkeiten gibt es dafür? Wieviele Möglichkeiten hat man danach für v_2, danach für v_3, ... und am Ende für v_n?

(b) Geben Sie die Elemente von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$ an.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 9./10. Januar 2017, in den Übungen