Übungsaufgaben zur Funktionentheorie

1. *(6 Punkte)* Berechne die folgenden Integrale:

   a) $\int\limits_{\partial D_1(-1)} \frac{1}{(z+1)(z-1)^4}\,dz$; b) $\int\limits_{\partial D_3(-2i)} \frac{1}{z^2+\pi^2}\,dz$; c) $\int\limits_{\partial D_1(0)} \frac{e^{2z+3}}{z^2(z+2)}\,dz$;

   d) $\int\limits_{\partial D_1(0)} \left(\frac{\sin(z)}{z}\right)^2 dz$; e) $\int\limits_{\partial D_2(2i)} \frac{z^5}{(z-i)^4}\,dz$; f) $\int\limits_{\partial D_6(0)} \frac{1}{(z-5)^n(z-8)^m}\,dz, \quad n, m \in \mathbb{N}$.

2. *(4 Punkte)* Zeige, dass für jedes $R > 0$ gilt:

$$\sup_{z \in \partial D_R(0)} |\cos(z)| \geq 1.$$

3. *(4 Punkte)* Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ gegeben durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = c + r(t) \cdot e^{it},$$

   wobei $c \in \mathbb{C}$ und $r(t)$ eine auf $[0, 2\pi]$ positive stückweise differenzierbare Funktion ist. Zeige, dass

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-c} = 2\pi i.$$

4. *(6 Punkte)* Seien U ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine auf U lokal gleichmäßig konvergente Folge holomorpher Funktionen mit Grenzwert $f : U \to \mathbb{C}$. Zeige, dass f holomorph ist.

   (Hinweis: Man kann z. B. die Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (2) im Satz 3.24 benutzen.)

Abgabe bis Mittwoch, den 20. Dezember 2017, in der Übung