Übungsaufgaben zur Funktionentheorie

1. *(3 Punkte)* Zeige, dass die Funktion $f(z) = \Re(z)$ keine Stammfunktion auf $\mathbb{C}$ besitzt.

2. *(3 Punkte)* Zeige, dass für jedes Polynom $P(z)$ gilt:

$$\int_{\partial D_R(z_0)} \overline{P(z)}\,dz = 2\pi i R^2\,\overline{P'(z_0)} \qquad (\forall\ z_0 \in \mathbb{C},\ R > 0).$$

3. *(2 Punkte)* Beweise, dass die Menge $\mathbb{C} \setminus [0,1]$ kein Sterngebiet ist.

4. *(6 Punkte)* Berechne die folgenden Integrale mit Hilfe des Integralsatzes von Cauchy:

   a) $\int_{\partial D_{\frac{1}{2}}(0)} \frac{1}{z^2+3iz-2}\,dz$; b) $\int_{\partial D_4(0)} \frac{e^{iz}}{z-\pi}\,dz$;

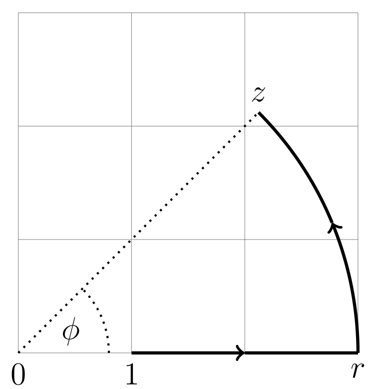
   c) $\int_{\partial D_1(i)} \frac{1}{1+z^2}\,dz$; d) $\int_{\partial D_2(0)} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz$.

5. *(6 Punkte)* Sei $U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (die geschlitzte Ebene).

   a) Erkläre, warum die Funktion $\frac{1}{z}$ integrabel auf U ist.

   b) Erkläre, warum die Funktion $\mathrm{Log}(z) = \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta}$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ auf U ist.

   c) Berechne den Wert von $\mathrm{Log}(z)$ bei $z = re^{i\phi} \in U$ durch Ersetzung der Strecke $[1,z]$ durch den folgenden Weg:



   d) Zeige, dass $\mathrm{Log}(e^z) = z$.

Abgabe bis Mittwoch, den 13. Dezember 2017, in der Übung