Übungsaufgaben zur Funktionentheorie

1. *(4 Punkte)* Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f \in \mathcal{O}(U)$. Beweise die folgende Aussagen:
   a) Wenn f nur reelle Werte annimmt, so ist f konstant.
   b) Wenn f nicht konstant ist, so ist die Funktion $U \ni z \mapsto \overline{f(z)}$ nicht holomorph.

2. *(4 Punkte)* Zeige, dass die Folge $f_n(z) = \frac{1}{2+z^n}$ auf $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ lokal gleichmäßig gegen $f(z) = 1/2$ konvergiert. Beweise, dass die Konvergenz nicht gleichmäßig ist.

3. *(4 Punkte)*
   a) Welche Funktion $f(z)$ wird durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/2^n$ auf ihrem Konvergenzkreis dargestellt?
   b) Finde eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-i)^n$, die in einer Umgebung von i dieselbe Funktion darstellt. Welchen Konvergenzradius hat die neue Reihe?

4. *(4 Punkte)* Welche Funktion $f(z)$ wird durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 z^n$ auf einer Umgebung von 0 dargestellt?

5. *(4 Punkte)* Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \frac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2}$ in eine Potenzreihe um den Punkt $z_0 = 0$.

Abgabe bis Mittwoch, den 8. November 2017, in der Übung