

Übungsaufgaben zur Funktionentheorie

1. (6 Punkte) Bestimme den Hauptteil der folgenden Funktionen in allen ihren Singularitäten:

a) $f(z) = \frac{1-\cos(z)}{z^3}$; b) $f(z) = \frac{z^2}{(1+z)^3}$; c) $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3}$.

2. (6 Punkte) Berechne die folgende Integrale:

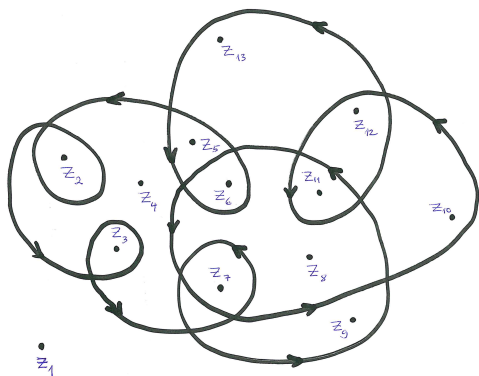
a) $\int_{\partial D_2(0)} \frac{1}{\sin(z)} dz$; b) $\int_{\partial D_3(0)} \frac{\sin(3z)}{e^{2z}-1} dz$; c) $\int_{\partial D_{100}(0)} z \cos\left(\frac{1}{z^2}\right) dz$.

3. (4 Punkte) Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg und fixiere $z \notin \text{Sp}(\gamma)$. Sei auch $\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ der Weg gegeben durch $\bar{\gamma}(t) = \overline{\gamma(t)}$. Beweise die folgende Formel:

$$\text{Ind}_z(\gamma) = -\text{Ind}_{\bar{z}}(\bar{\gamma}).$$

4. (4 Punkte) Berechne die Umlaufzahl von unten gezeichneten Wegen bezüglich aller angezeigten Punkte z_i .

a)



b)

