Funktionentheorie

WS 2017/2018

Christian Sevenheck

Fakultät für Mathematik

TU Chemnitz

vorläufige Fassung, 6. Februar 2018

Fehler und Bemerkungen bitte an : christian.sevenheck@mathematik.tu-chemnitz.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Die komplexen Zahlen

In diesem Abschnitt werden wir einige Dinge über die komplexen Zahlen, welche in den Vorlesungen Analysis 1+2 sowie Lineare Algebra 1+2 schon behandelt wurden, wiederholen und etwas vertiefen. Es handelt sich gewissermaßen um eine Vorbereitung auf die folgenden Kapitel, welche sich dann in intensiv mit komplexwertigen Funktionen, und insbesondere mit komplex differentierbaren Funktionen, genannt *holomorphe Funktionen* befassen werden.

1.1 Komplexe Zahlen

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist als $\mathbb{R}$-Vektorraum nichts anderes $\mathbb{R}^2$, d.h., eine komplexe Zahl z besteht aus einem Paar reeller Zahlen (a, b). Wir nennen a den Realteil von z und b den Imaginärteil von z und schreiben auch $a = \Re(z)$ und $b = \Im(z)$. Durch die Vektorraumstruktur wird die Addition auf $\mathbb{C}$ vorgegeben, und die Multiplikation definiert man so, dass $\mathbb{C}$ zu einem Körper wird, welcher $\mathbb{R}$ als ein Unterkörper enthält, also konkret

$$\begin{array}{rcl} (a,b)+(c,d) & = & (a+c, b+d) \\ (a,b)\cdot(c,d) & = & (ac-bd, ad+bc) \end{array}$$

Damit ist $0 = (0, 0)$ das neutrale Element bezüglich der Addition, $1 = (1, 0)$ ist das neutrale Element bezüglich der Multiplikation, und wir können auch durch komplexe Zahlen (außer durch 0) dividieren, es gilt nämlich für alle $(a, b) \neq (0, 0)$, dass

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = (1,0)$$

ist, also ist $(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$ das Inverse zu (a, b). Wir haben die injektive Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \hookrightarrow & \mathbb{C} \\ a & \longmapsto & (a,0) \end{array}$$

diese ist mit Addition und Multiplikation verträglich, und damit ist $\mathbb{C}$ ein Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$. Damit können wir die Skalarmultiplikation

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a,(c,d)) & \longmapsto & (a,0)\cdot(c,d) = (ac, ad) \end{array}$$

definieren, und damit ist $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und diese Struktur ist natürlich die Gleiche wie die $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur von $\mathbb{R}^2$. Insbesondere ist durch $1 = (1, 0)$ und $i = (0, 1)$ eine Basis von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ gegeben, und wir schreiben eine komplexe Zahl $z = (a, b)$ fast immer als $z = a + ib$. Dann gilt $i^2 =$

$(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$, und wir können die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ einfach durch *Ausmultiplizieren* zurückgewinnen, es gilt nämlich

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac+bd\cdot i^2) + (a\cdot di + bi\cdot c) = (ac-bd) + i(ad+bc).$$

Die zu $z = a+ib$ komplex konjugierte Zahl ist $\overline{z} := a - ib$. Man sieht sofort, dass $z = \overline{z}$ gilt genau dann, wenn $b = 0$, d.h., wenn $z \in \mathbb{R}$ ist. Weiterhin gelten die Rechenregeln:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_z \qquad \text{und} \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_z$$

Anders ausgedrückt, die komplexe Konjugation ist ein Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$, welcher den Unterkörper $\mathbb{R}$ punktweise festhält (in Formeln ausgedrückt, heißt dass, das $\{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} = z\} = \mathbb{R}$ ist).
Später werden wir häufig benutzen, dass man Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl auch durch die komplexe Konjugation darstellen kann, es gilt nämlich

$$\Re(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) \qquad \text{und} \qquad \Im(z) = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$$

Multipliziert man eine komplexe Zahl z mit ihrer konjugiert komplexen Zahl $\overline{z}$, so erhält man eine nicht negative reelle Zahl, denn

$$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$$

Wir definieren

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$$

als den *Betrag* von z. Es gilt dann offensichtlich

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

1.2 Die Gaußsche Zahlenebene

Da $\mathbb{C}$ als Vektorraum gleich $\mathbb{R}^2$ ist, können wir komplexe Zahlen natürlich als Punkte in der Ebene auffassen. Dieser geometrische Standpunkt ist außerordentlich nützlich. Wir wollen daher hier die wichtigsten Dinge dazu wiederholen.
Jeden Punkt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ kann man durch Polarkoordinaten darstellen, wir schreiben

$$a = r\cdot\cos(\varphi) \qquad \text{und} \qquad a = r\cdot\sin(\varphi)$$

Falls $z = (a,b) = a+ib$ als komplexe Zahl aufgefasst wird, dann nennen wir $\varphi =: \arg(z)$ das Argument von z. Es ist natürlich $r = |z|$ der Betrag von z. Das Paar (r,φ) heißt Polarkoordinaten von z. Es ist $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi \in [0,2\pi)$ oder genauer $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, d.h., φ ist ein Repräsentant in $[0,2\pi)$ der Quotientengruppe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Wir rechnen das Argument von z also modulo 2π aus. In Polarkoordinaten läßt sich die Multiplikation von komplexen Zahlen besonders einfach darstellen. Schreiben wir für einen Moment Elemente aus $\mathbb{C}$ als Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dann ist Multiplikation mit $z = r\cdot(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ durch die Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto r\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gegeben. Da

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$$

gilt, ist die Multiplikation mit z also eine Verknüpfung einer Drehung mit einer Streckung um den Faktor r. Besonders interessant ist die komplexe Multiplikation, wenn wir uns auf den Fall $r = 1$ beschränken. Wir definieren

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

dann ist $(S^1,\cdot)\subset(\mathbb{C}\backslash\{0\},\cdot)$ eine Untergruppe. Multiplikation mit einem Element $z=\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)\in S^1$ entspricht genau der Drehung um den Ursprung mit Drehwinkel φ. Insbesondere gilt die Formel von *de Moivre*

$$(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)^n=\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)$$

Durch Ausrechnen der linken Seite mit der binomischen Formel erhält man Ausdrücke für $\cos(n\varphi)$ und $\sin(n\varphi)$ als Polynome in $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$, so ist z.B.:

$$(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)^2=\cos^2(\varphi)+2i\cos(\varphi)\sin(\varphi)-\sin^2(\varphi)\overset{!}{=}\cos(2\varphi)+i\sin(2\varphi)$$

also erhalten wir

$$\cos(2\varphi)=\cos^2(\varphi)-\sin^2(\varphi)\qquad\text{und}\qquad\sin(2\varphi)=2\cos(\varphi)\sin(\varphi).$$

Dies ist ein erstes Beispiel, wie eine Aussage über reelle Zahlen oder Funktionen mit Hilfe einer (geometrischen) Überlegung über komplexe Zahlen einfacher bewiesen werden kann.
Betrachten wir nun Gleichung der Form

$$z^n=z' \tag{1.1}$$

für eine vorgegebene komplexe Zahl $z'\in\mathbb{C}$. Schreiben wir $z'=r'\cdot(\cos(\varphi')+i\cdot\sin(\varphi'))$, und $z=r\cdot(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$, dann ist

$$r'=r^n\qquad\text{und}\qquad\varphi'=n\cdot\varphi$$

Diese Gleichungen sind für $r'=\sqrt[n]{r}$ und $\varphi=\frac{\varphi'+2\pi k}{n}$ für $k\in\{0,\dots,n-1\}$ erfüllt (zur Erinnerung: es ist immer $\varphi\in\mathbb{R}/2\pi i\mathbb{Z}$). Also hat die Gleichung (1.1) für $r'>0$ genau n Lösungen, nämlich

$$z=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi'+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi'+2\pi k}{n}\right)$$

für $k\in\{0,\dots,n-1\}$. Geometrisch sieht man, dass die Abbildung $z\mapsto z^n$ die den Winkel zwischen zwei komplexen Zahlen mit dem Faktor n multipliziert, z.B. wird durch $z\mapsto z^2$ die obere Halbebene

$$\mathbb{H}:=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\Im(z)\geq 0\}$$

auf ganz $\mathbb{C}$ abgebildet. Daher hat die Gleichung $z^2=z'$ für alle $z'\neq 0$ genau zwei Lösungen und die Gleichung $z^n=z'$ für alle $z'\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ genau n Lösungen, wie wir eben algebraisch verifiziert haben.
Der Spezialfall $z'=1$ ist noch interessant, die Menge der Lösungen

$$\mu_n:=\{z\in\mathbb{C}\,|\,z^n=1\}$$

heißt Menge der n-ten *Einheitswurzeln.* Wir haben Untergruppeninklusionen $(\mu_n,\cdot)\subset(S^1,\cdot)\subset(\mathbb{C}\backslash\{0\},\cdot)$.
Die n-ten Einheitswurzeln sind Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks auf dem Einheitskreis S^1.
Schlußendlich wollen wir noch etwas zur Topologie von $\mathbb{C}$ sagen bzw. wiederholen. Zunächst sollen einige Begriffe, die vielleicht schon in der Analysis gefallen sind, aufgefrischt bzw. neu eingeführt werden.

Definition 1.1. *Sei X eine beliebige Menge. Sei $d:X\times X\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Abbildung. Dann heißt d Metrik, und das Paar (X,d) ein metrischer Raum, falls die folgenden drei Axiome gelten:*

D1 $d(x,y)=0$ *genau dann, wenn* $x=y$.

D2 $d(x,y)=d(y,x)$.

D3 $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ *(Dreiecksungleichung).*

Das für uns wichtigste Beispiel eines metrischen Raumes ist eine offene Teilmenge $U\subset\mathbb{R}^n$ zusammen mit der Metrik $d(x,y):=\|x-y\|$, wobei $\|\ \|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ ist. Insbesondere gilt dies für $X=\mathbb{C}$, wo wir ganz explizit

$$d(z_1,z_2)=\sqrt{\Re(z_1-z_2)^2+\Im(z_1-z_2)^2}$$

setzen. Für einen metrischen Raum haben wir die folgenden wichtigen Begriffe:

Definition-Lemma 1.2. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt offen, falls für alle $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass der ε-Ball*

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X \,|\, d(x,y) < \varepsilon\}$$

in U enthalten ist. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement $U := X \backslash Y$ offen ist.

Ein metrischer Raum ist ein spezielles Beispiel für einen *topologischen Raum*, dies ist eine Menge X, zusammen mit Menge von Teilmengen von X, welche die offenen Mengen darstellen sollen (und welche gewisse Axiome erfüllen). In einem allgemeinen topologischen Raum sind die offenen Mengen also ein Datum, und nicht durch eine andere Struktur, wie eine Metrik gegeben. Man kann dann leicht zeigen, dass in einem metrischen Raum die oben definierten offenen Mengen die Axiome eines topologischen Raumes erfüllen.
Mit Hilfe der offenen Mengen (oder auch nur mit Hilfe der ε-Bälle) definieren wir den fundamentalen Begriff der Konvergenz.

Definition 1.3. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann sagen wir, dass (x_n) konvergent mit Grenzwert $x \in X$ ist (und wir schreiben $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$), falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $k > N$ gilt, dass $x_k \in B_\varepsilon(x)$ ist.*

Wir werden es häufig mit speziellen offenen Mengen zu tun haben, welche eine Zusatzeigenschaft haben, nämlich, dass sie, anschaulich gesprochen, aus „einem Teil“ bestehen. Die genaue Definition ist wie folgt.

Definition 1.4. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann heißt X zusammenhängend, wenn es keine Zerlegung $X = X_1 \cup X_2$ mit $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, X_1 und X_2 offen (und daher auch abgeschlossen) und $X_1 \neq \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$ gibt.*

Ebenso wichtig ist der Begriff eines kompakten metrischen oder topologischen Raumes.

Definition 1.5. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann heißt X kompakt, falls sich aus jeder offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ durch offene Mengen $U_i \subset X$ eine endliche Teilmenge $(U_{i_1},\ldots,U_{i_n})_{i_1,\ldots,i_n\in I}$ auswählen lässt, so dass $X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$ gilt.*

Wie schon erwähnt sind die für uns relevanten metrischen Räume die Räume $\mathbb{R}^n$ mit der durch das Skalarprodukt induzierten Metrik. Hier gilt der folgende Satz, welchen wir ohne Beweis zitieren.

Satz 1.6 (Satz von Heine-Borel)**.** *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$, dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

1. *X ist kompakt.*
2. *X ist in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt.*
3. *Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X hat einen Häufungspunkt in X.*

Zur Erinnerung: Eine Menge heißt beschränkt, falls $X \subset B_\varepsilon(0)$ für ein $\varepsilon > 0$ gilt. Die folgende Konsequenz von diesem Satz werden wir später benutzen.

Satz 1.7. *Sei $\mathbb{R}^n \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots$, und seien $K_1, K_2, \ldots$ kompakt. Dann ist*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset.$$

Beweis. Wir wählen für alle $n = 1, 2, \ldots$ einen Punkt $z_n \in K_i$. Dann liegt die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K_1, und weil K_1 kompakt ist, hat diese Folge nach dem letzten Satz einen Häufungspunkt z_0 in K_1. Für alle $i \in \mathbb{N}$ muss aber dann z_0 auch ein Häufungspunkt der Folge $(z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots)$ sein, d.h., und weil (wieder nach dem letzten Satz) K_i abgeschlossen ist, muss dann $z_0 \in K_i$ gelten. Dies gilt für alle $i \in \mathbb{N}$, also erhalten wir

$$z_0 \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i.$$

□

Insbesondere im Fall $X = \mathbb{C}$ können wir die obigen Begriffe alle anwenden. Wir haben hier noch die folgende wichtige Definition.

Definition 1.8. *Eine offene und zusammenhängende Menge U in $\mathbb{C}$ heißt* Gebiet*.*

Kapitel 2

Komplexe Differentierbarkeit

In diesem Kapitel beginnen wir mit dem eigentlichen Stoff der Funktionentheorie. Wir führen den Begriff der komplexen Differentierbarkeit ein, vergleichen ihn mit der aus der Analysis bekannten Differentierbarkeit reeller Abbildungen und diskutieren Potenzreihen und deren Zusammenhang zu komplex differentierbaren Funktionen.

2.1 Holomorphe Funktionen

In diesem Abschnitt werden die in dieser Vorlesung zentralen Objekte, die holomorphen Funktionen eingeführt. Diese sind spezielle komplexwertige Fuktionen, welche wir zuerst definieren.

Definition-Lemma 2.1. *Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{C}$$

heißt komplexe oder genauer komplexwertige Funktion. Dies ist äquivalent zum Datum der reellwertigen Funktionen

$$\Re(f) : X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \textit{und} \qquad \Im(f) : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $\Re(f)(x) := \Re(f(x))$ und $\Im(f)(x) := \Im(f(x))$.

Wir erinnern an den fundamentalen Begriff der Stetigkeit.

Definition 2.2. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt f stetig bei $x_0 \in X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in B_\delta(x_0)$ gilt, dass $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$ ist.*

Klar ist (und zwar wegen der Wahl der Metrik auf $\mathbb{C}$), dass f stetig ist genau dann, wenn $\Re(f)$ und $\Im(f)$ stetig sind (als Funktionen von X nach $\mathbb{R}$).
Wir interessieren uns in dieser Vorlesung eigentlich nur für zwei Fälle, nämlich einmal, falls $X = U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet ist, oder, falls $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall ist, dann ist eine komplexe Abbildung $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein (eventuell stetiger) *Weg* oder *Pfad* in $\mathbb{C}$.
Wir kommen nun zum wichtigsten Begriff der ganzen Vorlesung.

Definition 2.3. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion. Sei $z_0 \in U$. Dann heißt f bei z_0 komplex differentierbar, falls es eine Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ gibt, welche bei z_0 stetig ist, so dass*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z)$$

für alle $z \in U$ gilt. Die komplexe Zahl $g(z_0)$ heißt die Ableitung von f bei z_0 und wird auch als $f'(z_0)$ bezeichnet.

Dies ist exakt die gleiche Definition, wie die Differentierbarkeit von reellen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ mit $I \subset \mathbb{R}$. Man beachte, dass sich die Definition als

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

für alle $z \in U \backslash \{z_0\}$ umschreiben läßt, und dann ist die Forderung, dass g bei z_0 stetig ist, äquivalent zur Bedingung, dass der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert und gleich $g(z_0)$ ist.
Besonders wichtig sind Funktionen, welche überall komplex differentierbar sind.

Definition 2.4. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differentierbar an allen Punkten $z \in U$. Dann heißt f eine holomorphe Funktion auf U. Die Menge der auf U holomorphen Funktionen wird mit $\mathcal{O}(U)$ bezeichnet. Die Funktion $U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f'(z)$ heißt die Ableitung von f und wird mit f' bezeichnet.*

Wir betrachten die folgenden ersten Beispiele:

1. Sei $c \in \mathbb{C}$, dann ist die konstante Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto c$ ist natürlich holomorph, mit Ableitung $f' = 0$, denn für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt, dass $c = f(z) \stackrel{!}{=} f(z_0) + (z - z_0) \cdot 0 = c$ ist.

2. Die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, also die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z$ ist holomorph mit Ableitung $f' = 1$, denn hier ist für $z_0 \in \mathbb{C}$ und für alle $z \in \mathbb{C}$: $z = f(z) \stackrel{!}{=} f(z_0) + 1 \cdot (z - z_0) = z_0 + (z - z_0) = z$.

3. Die Funktion $f(z) = \overline{z}$ ist nirgends komplex differentierbar: Angenommen, es gäbe ein $z_0 = x_0 + iy_0$, so dass f bei z_0 komplex differentierbar ist, d.h., so dass es $g : B_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$, stetig bei z_0 mit $f(z) = f(z_0) + g(z)(z - z_0)$. Dann gilt für alle $z = x + iy_0$ mit $x \neq x_0$, dass

$$x - iy_0 = f(z) \stackrel{!}{=} f(z_0) + g(z)(z - z_0) = x_0 - iy_0 + g(z)(x - x_0),$$

also $x - x_0 = g(z)(x - x_0)$, also $g(z) = 1$ für alle $z \neq z_0$, also wegen der Stetigkeit von g auch $g(z_0) = 1$. Andererseits gilt für alle $z = x_0 + iy$ mit $y \neq y_0$, dass

$$x_0 - iy = f(z) \stackrel{!}{=} f(z_0) + g(z)(z - z_0) = x_0 - iy_0 + g(z)i(y - y_0),$$

also $y - y_0 = -g(z)(y - y_0)$ und damit ist $g(z) = -1$ für alle $z \neq z_0$, also wegen Stetigkeit auch $g(z_0) = -1$. Dies ist ein Widerspruch, also ist $f(z) = \overline{z}$ nirgends komplex differentierbar.

Die folgende Aussage ist offensichtlich und wird nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

Lemma 2.5. *Eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist stetig, d.h. $\mathcal{O}(U) \subset \mathcal{C}(U, \mathbb{C})$, wobei $\mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum der auf U stetigen komplexen Funktionen bezeichnet.*

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass für jedes $z_0 \in U$ die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ bei z_0 stetig ist. Nach Definition gilt auf U: $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z)$, wobei $g : U \to \mathbb{C}$ bei z_0 stetig ist. f ist also eine Verkettung von Funktionen, welche alle bei z_0 stetig sind, und damit ist f auch bei z_0 stetig. $\square$

Um weitere holomorphe Funktionen zu konstruieren, geben wir gewisse elementare Operationen an, welche aus komplex differentierbaren Funktionen weitere komplex differentierbare Funktionen konstruieren.

Satz 2.6. *1. Sei U ein Gebiet, seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ komplexe Funktionen und sei $z_0 \in U$. Dann gilt*

(a) Sind f und g bei z_0 komplex differentierbar, so auch $f + g$, und es gilt $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.

(b) Sind f und g bei z_0 komplex differentierbar, so auch $f \cdot g$, und es gilt die Leibnizregel: $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$.

2. *Es gilt die Kettenregel: Seien U, V Gebiete, seien $f : V \to \mathbb{C}$ und sei $g : U \to V$ komplexe Funktionen. Sei $z_0 \in U$ und sei g bei z_0 und f bei $g(z_0) \in V$ komplex differentierbar. Dann ist $f \circ g : U \to \mathbb{C}$ bei z_0 komplex differentierbar, und es gilt $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)$.*

3. *Seien $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, dann ist das Polynom $P(z) := a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ holomorph, d.h. $P \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, und es gilt $P'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \ldots + a_1$.*

Beweis. Die Aussagen 1.(a) und 1.(b) und 2. werden wie in der Analysis für reelle Funktionen einer Variablen bewiesen. Die Aussage 3. ist klar, denn ein Polynom entsteht durch sukzessive Addition und Multiplikation von holomorphen Funktionen (startend mit der konstanten Funktion und der Identität). □

Wir sehen also, dass $\mathcal{O}(U)$ ein $\mathbb{C}$-Untervektorraum von $\mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ ist, und sogar ein Unterring, da $\mathcal{O}(U)$ multiplikativ abgeschlossen ist. Andererseits ist $\mathbb{C}[z]$ ein Untervektorraum und Unterring von $\mathcal{O}(U)$, d.h., wir haben die Inklusionen

$$\mathbb{C}[z] \subsetneq \mathcal{O}(U) \subsetneq \mathcal{C}(U, \mathbb{C}).$$

Die Striktheit der Inklusion $\mathcal{O}(U) \subsetneq \mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ haben wir schon gesehen, denn $f(z) = \overline{z}$ ist eine stetige komplexe Funktionen gibt, die nicht holomorph ist (auf keinem Gebiet). Wir zeigen nun, dass es auf geeigneten Gebieten holomorphe Funktionen gibt, welche keine Polynome sind, damit ist auch die Striktheit der ersten Inklusion $\mathbb{C}[z] \subsetneq \mathcal{O}(U)$ klar. Zuerst brauchen wir eine Hilfsaussage.

Lemma 2.7. *Sei U ein Gebiet, $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion, welche in $z_0 \in U$ komplex differentierbar ist. Angenommen, wir haben $f(z_0) \neq 0$, dann ist die Funktion $1/f$ auf einer Umgebung $B_\varepsilon(z_0)$ definiert, und bei z_0 komplex differentierbar. Außerdem gilt*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}.$$

Beweis. Wie wir im Lemma 2.5 gesehen haben, ist f bei z_0 stetig, also folgt aus $f(z_0) \neq 0$, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in B_\varepsilon(z_0)$ ist. Daher ist $1/f$ auf $B_\varepsilon(z_0)$ definiert. Wegen der komplexen Differentierbarkeit von f bei z_0 ist $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) g(z)$ für alle $z \in B_\varepsilon(z_0)$ mit einer komplexen und bei z_0 stetigen Funktion $g : B_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$. Es gilt dann

$$\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)} = -\frac{f(z) - f(z_0)}{f(z) f(z_0)} = \underbrace{-\frac{g(z)}{f(z) f(z_0)}}_{=:\widetilde{g}(z)}(z - z_0)$$

Da g bei z_0 stetig ist, und da $f(z_0) \neq 0$ ist, ist also $\widetilde{g}$ bei z_0 stetig, und damit ist die komplexe Differentierbarkeit von $1/f$ bei z_0 bewiesen. Der Wert der Ableitung $(1/f)'$ bei z_0 ist nach Definition genau der Wert $\widetilde{g}(z_0)$, dieser ist

$$\widetilde{g}(z_0) = -\frac{g(z_0)}{f(z_0) f(z_0)} = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}.$$

□

Korollar 2.8. 1. *Sei U ein Gebiet, sei $h \in \mathcal{O}(U)$ mit $h(z) \neq 0$ für alle $z \in U$, dann ist $f/h \in \mathcal{O}(U)$ und $(f/h)' = \frac{f'h - fg'}{h^2}$.*

2. *Rationale Funktionen*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + \ldots + a_0}{b_m z^m + \ldots + b_0}$$

mit $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ sind ausserhalb der Nullstellen von $Q(z)$ holomorph, d.h. $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $U = \mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{C} \,|\, Q(z) = 0\}$.

Beweis. Die zweite Aussage folgt sofort aus der ersten, so dass wir nur diese zu zeigen haben. Da $f/h = f \cdot 1/h$ gilt, und $1/h$ wegen des letzten Lemmas auf ganz U komplex differenzierbar ist (d.h., $1/h \in \mathcal{O}(U)$), folgt die Holomorphie von f/h einfach aus Satz 2.6, 1.(b), und die Formel für die Ableitung von f/h erhält man genauso. □

2.2 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Ein erster wichtiger Schritt zum Verständnis der Definition der komplexen Differentierbarkeit ist der Vergleich mit dem Differentierbarkeitsbegriff von reellen Funktionen. Sei $f: U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$ eine komplexe Funktion. Wenn wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren, erhalten wir eine Abbildung von U nach $\mathbb{R}^2$, welche wir mit $f_\mathbb{R}$ bezeichnen. Sie habe Komponenten $f_\mathbb{R} = (u, v)$, mit $u, v : U \to \mathbb{R}$. Schreiben wir noch $z = x + iy$, dann sind u, v Funktionen in x, y, und wir haben $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Wir wiederholen die Definition der Differentierbarkeit von $f_\mathbb{R}$.

Definition 2.9. *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen (und zusammenhängend) und $f_\mathbb{R} : U \to \mathbb{R}^2$ stetig. Sei $z_0 = (x_0, y_0) \in U$, dann heißt $f_\mathbb{R}$ bei (x_0, y_0) differentierbar, falls es eine Abbildung $g_\mathbb{R} : U \to M(2 \times 2, \mathbb{R})$ gibt, welche bei (x_0, y_0) stetig ist, und so dass*

$$f_\mathbb{R}(x, y) = f_\mathbb{R}(x_0, y_0) + g_\mathbb{R}(x, y) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in U$ gilt. Wir schreiben $Df_\mathbb{R}(x_0, y_0)$ für den Wert $g_\mathbb{R}(x_0, y_0)$. Die Ableitungsmatrix $(Df_\mathbb{R})(x_0, y_0)$ ist durch die Jacobi-Matrix darstellbar, d.h., es gilt

$$g_\mathbb{R}(x_0, y_0) = (Df_\mathbb{R})(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} (x_0, y_0).$$

Für unsere Zwecke ist eine Umformulierung der reellen Differentierbarkeit sinnvoll.

Lemma 2.10. *Sei $f_\mathbb{R} : U \to \mathbb{R}^2$ gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *$f_\mathbb{R}$ ist bei $z_0 = (x_0, y_0)$ reell differentierbar.*
2. *Es gibt Abbildungen $A_\mathbb{R}, B_\mathbb{R} : U \to \mathbb{R}^2$, welche in (x_0, y_0) stetig sind, so dass*

   $$f_\mathbb{R}(x, y) = f_\mathbb{R}(x_0, y_0) + (x - x_0)A_\mathbb{R}(x, y) + (y - y_0)B_\mathbb{R}(x, y)$$

   für alle $(x, y) \in U$ gibt. Die Werte $A_\mathbb{R}(x_0, y_0)$ bzw $B_\mathbb{R}(x_0, y_0)$ sind die (vektorwertigen) partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_\mathbb{R}}{\partial x}(x_0, y_0)$ bzw $\frac{\partial f_\mathbb{R}}{\partial y}(x_0, y_0)$ von $f_\mathbb{R}$. Die zugehörigen komplexen Funktionen $A(z)$ und $B(z)$ geben die partiellen Ableitungen von f bei z_0, d.h. $A(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ und $B(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.
3. *Es gibt komplexe Funktionen $C, D : U \to \mathbb{C}$, welche in z_0 stetig sind, so dass*

   $$f(z) = f(z_0) + C(z)(z - z_0) + D(z)(\overline{z} - \overline{z}_0)$$

   für alle $z \in U$ gilt. Es ist dann $C(z_0) = (\frac{\partial f}{\partial z})(z_0)$ bzw. $D(z_0) = (\frac{\partial f}{\partial \overline{z}})(z_0)$, mit

   $$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}) \qquad \textit{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$$

Beweis. Die Äquivalenz der ersten beiden Aussage ist evident, die Abbildungen $A_\mathbb{R}$ bzw. $B_\mathbb{R}$ sind einfach die erste bzw. die zweite Spalte der matrixwertigen Abbildung $g_\mathbb{R}$ aus Definition 2.9, und daher ist $A_\mathbb{R}(x_0, y_0) = \frac{\partial f_\mathbb{R}}{\partial x}(x_0, y_0)$ und $B_\mathbb{R}(x_0, y_0) = \frac{\partial f_\mathbb{R}}{\partial y}(x_0, y_0)$.
Wir haben also nur die Äquivalenz der zweiten zur dritten Aussage zu zeigen. Seien Abbildungen $A_\mathbb{R}, B_\mathbb{R}$ mit $f_\mathbb{R}(x, y) = f_\mathbb{R}(x_0, y_0) + (x - x_0)A_\mathbb{R}(x, y) + (y - y_0)B_\mathbb{R}(x, y)$ gegeben, dann benutzen wir die Gleichungen

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(z - z_0 + \overline{z} - \overline{z}_0) \qquad \text{und} \qquad y - y_0 = -\frac{i}{2}(z - z_0 - \overline{z} + \overline{z}_0).$$

Seien $A, B : U \to \mathbb{C}$ die zu $A_\mathbb{R}, B_\mathbb{R}$ gehörenden komplexen Abbildungen. Dann erhalten wir durch Einsetzen

$$f(z) = f_\mathbb{R}(x, y) = f(z_0) + (z - z_0)\frac{1}{2}(A(z) - iB(z)) + (\overline{z} - \overline{z}_0)\frac{1}{2}(A(z) + iB(z)),$$

und dann ist die gewünschte Aussage bewiesen, falls wir $C(z) := \frac{1}{2}(A(z) - iB(z))$ und $D(z) := \frac{1}{2}(A(z) + iB(z))$ setzen und damit gilt auch $C(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ sowie $D(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$. Nehmen wir andererseits an, dass

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)C(z) + (\overline{z} - \overline{z}_0)D(z)$$

ist, und setzten wir die Identitäten $z - z_0 = x - x_0 + i(y - y_0)$ sowie $\overline{z} - \overline{z}_0 = (x - x_0) - i(y - y_0)$ ein, dann bekommen wir

$$f_{\mathbb{R}}(x, y) = f_{\mathbb{R}}(x_0, y_0) + (x - x_0)(C_{\mathbb{R}}(x, y) + D_{\mathbb{R}}(x, y)) + (y - y_0) \cdot I \cdot (C_{\mathbb{R}}(x, y) - D_{\mathbb{R}}(x, y))$$

wobei $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die die Multiplikation mit $i = (0, 1)$ darstellende reelle 2×2-Matrix ist. Wenn wir nun $A_{\mathbb{R}} := C_{\mathbb{R}} + D_{\mathbb{R}}$ und $B_{\mathbb{R}} := I \cdot (C_{\mathbb{R}} - D_{\mathbb{R}})$ setzen, erhalten wir die zweite Aussage. $\square$

Vergleicht man diese Definition mit der Definition der komplexen Differentierbarkeit, so sehen beide formal recht ähnlich aus. Die Frage ist also, für welche reell differentierbaren Abbildungen $f_{\mathbb{R}}$ auch die komplexe Funktion f (komplex) differentierbar ist. Dies wird durch folgenden Satz beantwortet.

Satz 2.11. *Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion. Sei $f_{\mathbb{R}} = (u, v) : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die zugehörige reelle Funktion, so dass $f = u + iv$. Sei $z_0 = (x_0, y_0) \in G$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

1. *f ist bei z_0 komplex differentierbar.*
2. *$f_{\mathbb{R}}$ ist bei (x_0, y_0) reell differentierbar, und es gilt $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$.*
3. *$f_{\mathbb{R}}$ ist bei (x_0, y_0) reell differentierbar, und gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

am Punkt $z_0 = (x_0, y_0)$.

Beweis. **1. $\Longrightarrow$ 2.** Sei f bei z_0 komplex differenzierbar, dann gibt es $g : U \to \mathbb{C}$, stetig bei z_0 mit $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z)$. Setze $C(z) := g(z)$ und $D(z) := 0$ (dann sind C und D natürlich bei z_0 stetig), dann gilt

$$f(z) = f(z_0) + C(z)(z - z_0) + D(z)(\overline{z} - \overline{z}_0)$$

also ist f nach dem 3 Kriterium des letzten Lemmas bei z_0 reell differentierbar. Außerdem haben wir schon festgestellt, dass dann

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = D(z_0)$$

gelten muss, also erhalten wir, dass $\partial f / \partial \overline{z}(z_0) = 0$ gilt.

2. $\Longrightarrow$ 1. Sei f bei z_0 reell differentierbar, dann gibt es also komplexe Funktionen $C, D : U \to \mathbb{C}$, stetig bei z_0 mit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)C(z) + (\overline{z} - \overline{z}_0)D(z)$$

und so, dass $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = D(z_0)$ gilt, also haben wir laut Voraussetzung $D(z_0) = 0$. Definiere

$$\widehat{g}(z) := \begin{cases} D(z)\frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} & \text{für } z \neq z_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\overline{z - z_0} = \overline{z} - \overline{z}_0$ gilt, haben wir

$$\left| \frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} \right| = 1,$$

also gilt $\lim_{z\to z_0} \widehat{g}(z) = \lim_{z\to z_0} D(z) = 0$ wegen der Stetigkeit von D bei z_0. Also ist $\widehat{g}$ bei z_0 stetig, und wir setzten $g(z) := C(z) + \widehat{g}(z)$, dann ist auch g bei z_0 stetig, und wir erhalten

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot g(z),$$

d.h., f ist bei z_0 komplex differentierbar.

2. $\Longleftrightarrow$ 3. Es gilt

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u + iv}{\partial x} + i\frac{\partial u + iv}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)$$

Also ist die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$ genau zu den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen bei z_0 äquivalent, d.h., zu den Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

□

Wir fügen noch die folgenden direkten Konsequenzen aus den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen hinzu.

Korollar 2.12. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.*

1. *Sei $f \in \mathcal{O}(U)$. Dann bestimmen die reellen Funktionen $\Re(f), \Im(f) : U \to \mathbb{R}$ einander bis auf eine Konstante, d.h., wenn $\Re(f)$ bekannt ist, dann kann man daraus bis auf eine Konstante eindeutig die Funktion $\Im(f)$ konstruieren und genauso andersherum.*

2. *Ist $f \in \mathcal{O}(U)$ und ist $f'(z) = 0$ für alle $z \in U$, dann ist f Konstant.*

3. *Seien $u, v : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differentierbar. Angenommen, u und v erfüllen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen (so dass die Funktion $u + iv : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf U ist). Dann sind u und v* harmonische *Funktionen auf U, d.h., es gilt:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Beweis. 1. Dies folgt direkt aus den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen: Sei $u : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differentierbare Funktion. Dann suchen wir v (ebenfalls auf U stetig differentierbar), so dass $f = u + iv$ auf U holomorph ist. Dann müssen also u und v die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllen. Da u bekannt ist, sind auch die Ableitungen $\partial u/\partial x$ und $\partial u/\partial y$ festgelegt, also wegen der CR-Gleichungen sind auch die Ableitungen $\partial v/\partial x$ und $\partial v/\partial y$ eindeutig bestimmt. Also ist die Funktion $v : U \to \mathbb{R}$ als Stammfunktion der partiellen Ableitungen $\partial v/\partial x$ und $\partial v/\partial y$ bis auf eine relle Konstante. Analog argumentiert man, wenn v vorgegeben ist, und man u sucht, so dass (v, u) die CR-Gleichungen erfüllen.

2. Aus den Voraussetzungen folgt, dass auf U gilt, dass $\partial f/\partial z = \partial f/\partial \overline{z} = 0$ gilt. Dann sieht man sofort, dass auch $\partial u/\partial x = \partial v/\partial x = \partial u/\partial y = \partial v/\partial y = 0$ gelten muss (mit $f = u + iv$), und dann sind u und v und daher auch f auf U konstant.

3. Da u und v beide zweimal stetig differentierbar sind, gilt Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen, d.h. wir haben

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Also bekommen wir unter Verwendung der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y} \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

sowie

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y} \stackrel{!}{=} -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

□

Als weitere Anwendung der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen beweisen wir die folgende Aussage.

Lemma 2.13. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist die komplexe Funktion*

$$\begin{array}{rcl} f : U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos(y) + i\sin(y)) \end{array}$$

auf U holomorph.

Beweis. Wir verwenden einfach die Äquivalenz 1. $\Longleftrightarrow$ 3. aus Satz 2.11. Wir haben $f_{\mathbb{R}}(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, mit

$$u(x, y) = e^x \cdot \cos(y) \qquad \text{und} \qquad v(x, y) = e^x \cdot \sin(y)$$

Dann berechnen wir

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y) & ; & \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y) & ; & \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos(y) \end{array}$$

Damit ergibt sich unmittelbar die Gültigkeit der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

auf ganz U. Wegen Satz 2.11 ist damit f in $\mathcal{O}(U)$. □

Es sei bemerkt, dass man das letzte Korollar natürlich auch einfacher mit Satz 2.11, 2. hätte beweisen können, denn es gilt $\partial e^z / \partial \overline{z} = 0$.

2.3 Potenzreihen

Wir wollen nun sehen, wie man viele andere holomorphe Funktionen konstruieren kann. Wir haben schon bewiesen, dass Polynome holomorph sind, und die natürlich Verallgemeinerung davon sind Potenzreichen.

Definition 2.14. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist eine Potenzreihe oder auch formale Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0 ein formaler Ausdruck*

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

Solche Potenzreichen können wir addieren und multiplizieren, nach den üblichen Regeln:

$$\begin{array}{rcl} \left(\sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n\right) + \left(\sum_{n\geq 0} b_n (z - z_0)^n\right) & := & \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n)(z - z_0)^n \\ \left(\sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} b_n (z - z_0)^n\right) & := & \sum_{n\geq 0} c_n (z - z_0)^n \end{array}$$

wobei

$$c_n := \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

ist. Darüber hinaus können wir eine Potenzreihe formal ableiten, d.h., wir definieren

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n\right)' := \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) a_{n+1} (z - z_0)^n.$$

Die folgende Aussage gilt allgemein, zur Vereinfachung der Notation formulieren wir sie nur für den Fall $z_0 = 0$.

Definition-Lemma 2.15. *Die Menge der formalen Potenzreihen um den Entwicklungspunkt* $0 \in \mathbb{C}$ *ist*

$$\mathbb{C}[[z]] := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mid a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\mathbb{C}[[z]]$ *ist ein kommutativer Ring mit* 1, *d.h.,* $(\mathbb{C}[[z]], +)$ *ist eine abelsche Gruppe, es gilt das Assoziativgesetz der Multiplikation und das Distributivgesetz zwischen Addition und Multiplikation. Das Einselement ist* $1 \cdot z^0$. *Der Polynomring* $\mathbb{C}[z] \subset \mathbb{C}[[z]]$ *ist ein Unterring des Rings der formalen Potenzreihen.*

Ein fundamentaler Unterschied zwischen Polynomen und formalen Potenzreihen ist, dass ein Polynom aus $\mathbb{C}[z]$ eine Funktion (auf ganz $\mathbb{C}$) darstellt, hingegen kann man in eine Potenzreihe $\sum_{i \geq 0} a_i z^i$ im Allgemeinen keinen Wert einsetzen, weil die dadurch entstehende Reihe divergent sein könnte. Tatsächlich wird die Reihe meistens für gewisse z divergent, und für gewisse z konvergent sein. Bevor wir dies genau formulieren, betrachten wir das fundamentale Beispiel der geometrischen Reihe.
Beispiel: Die Reihe

$$\sum_{n \geq 0} z^n$$

heißt geometrische Reihe. Man zeigt leicht mit vollständiger Induktion, dass die Partialsummen für alle $z \neq 1$ die Formel

$$S_k := \sum_{i=0}^{k} z^i = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z}$$

erfüllen. Damit kann man die Konvergenz bestimmen: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist $\lim_{n \mapsto \infty} z^{n+1} = 0$, und damit hat man

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \lim_{k \mapsto \infty} S_k = \frac{1}{1 - z} \qquad \text{für alle } |z| < 1.$$

Ist andererseits $|z| \geq 1$, so ist die Folge $(1 - z^{k+1})$ divergent, also auch die Folge der Partialsummen. Daher divergiert die geometrische Reihe in diesem Fall. Somit haben wir als *Konvergenzbereich* dieser Reihe (also als Menge der komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, so dass die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} z^i$ konvergiert) genau die offene Einheitskreisscheibe

$$B_1(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Für beliebige Reihen finden wir eine ganz ähnliche Situation. Bevor wir genau studieren können, wo eine Reihe konvergent, und wo sie divergent ist, müssen wir einige Hilfsmittel aus der Analysis über Funktionenfolgen- bzw. Reihen wiederholen. Wir beschränken uns auf komplexwertige Funktionen, welche auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ definiert sind.

Definition 2.16. *Sei* $U \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet, und sei* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Folge von Funktionen* $f_n : U \to \mathbb{C}$.

1. *Falls für alle* $x \in U$ *der Grenzwerte* $\lim_{n \to \infty} f_n(x) =: f(x)$ *existiert, dann heißt* (f_n) *auf* U punktweise *konvergent. Man beachte, dass die so definierte Grenzfunktion* $f : U \to \mathbb{C}$ *im Allgemeinen keine guten Eigenschaften hat, zum Beispiel nicht stetig zu sein braucht, obwohl alle* f_n *es sind, wie das Beispiel* $f_n := x^n : [0, 1] \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ *zeigt (es ist* $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ *für alle* $x \in [0, 1)$, *aber* $f(1) = 1$*).*

2. *Die Folge* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *heißt gleichmäßig konvergent auf* U *mit Grenzfunktion* $f : U \to \mathbb{C}$, *falls es für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *mit*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $n > N$ *und für alle* $x \in U$ *gibt. Diese Bedingung ist äquivalent zu der Aussage, dass*

$$\|f_n - f\|_U < \varepsilon$$

gilt, wobei

$$\|g\|_U := \sup_{x\in U} |g(x)| \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

ist.

3. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : U \to \mathbb{C}$ heißt lokal gleichmäßig konvergent auf U, falls jeder Punkt $z \in U$ eine offene Umgebung $B_\varepsilon(z)$ besitzt, so dass $(f_n)_{|B_\varepsilon(z)} : U_\varepsilon(z) \to \mathbb{C}$ gleichmäßig konvergent ist.*

Gleichmäßige Konvergenz ist also ein viel stärkeres Kriterium als punktweise Konvergenz, offensichtlich ist eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge auch punktweise konvergent. Eine lokal gleichmäßig konvergente Folge muss nicht gleichmäßig konvergent sein (sie ist es, wenn U kompakt wäre, was es aber hier in der Regel nicht ist). Trotzdem reicht dieser etwas schwächere Begriff aus, um die entscheidende Zusatzeigenschaft, welche gleichmäßigen konvergente Folgen stetiger Funktionen haben, zu zeigen, nämlich, dass die Grenzfunktion auch stetig ist.

Satz 2.17. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen mit Grenzwert $f : U \to \mathbb{C}$. Dann ist f stetig.*

Beweis. Sei $x_0 \in U$, dann wollen wir die Stetigkeit von f bei x_0 zeigen. Aus der Dreiecksungleichung folgt, dass für alle $x \in U$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \tag{2.1}$$

gilt. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wollen nun ein $\delta > 0$ finden, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in U$ mit $|x - x_0| < \delta$ ist. Wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) gegen f finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ und eine offene Umgebung $U_{\delta_1}(x_0)$, so dass $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in U_{\delta_1}(x_0)$ ist. Insbesondere gilt dann auch $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3$. Da nun alle Funktionen f_n, und insbesondere die Funktion f_N, stetig sind, gibt es für unser vorgegebenes $\varepsilon/3$ ein δ_2, so dass $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in B_{\delta_2}(x_0)$ sind. Sei nun $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$, dann liefert die Ungleichung (2.1) für $n = N$, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in B_\delta(x_0)$ ist, also ist f bei x_0 stetig. □

Das folgende Kriterium erlaubt es uns, lokal gleichmäßige Konvergenz zu testen.

Lemma 2.18. *Sei $f_n : U \to \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge, dann sind folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

1. *(f_n) konvergiert lokal gleichmäßig auf U.*

2. *(f_n) konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von U.*

Beweis. **1. $\Longrightarrow$ 2.** Sei $K \subset U$ kompakt. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig konvergent ist, existiert zu jedem Punkt $x \in K$ eine offene Umgebung $U(x)$, so dass (f_n) auf U gleichmäßig konvergiert. Da K kompakt ist, kann es von endlich vielen solchen Umgebungen überdeckt werden, und dann kann man das N, welches in der Definition der gleichmäßigen Konvergenz auftritt, einfach als Maximum der auf diesen endlich vielen Umgebungen gegebenen Zahlen N wählen, und erhält, dass (f_n) auf ganz K gleichmäßig konvergiert.

2. $\Longrightarrow$ 1. Sei $x \in U$, dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$ gilt. Dann ist $\overline{B_{\varepsilon/2}(x)} \subset U$, aber $\overline{B_{\varepsilon/2}(x)}$ ist wegen dem Satz von Heine-Borel (Satz 1.6) kompakt, also ist (f_n) auf $\overline{B_{\varepsilon/2}(x)}$ gleichmäßig konvergent, und dann natürlich auch auf $B_{\varepsilon/2}(x)$, also hat x eine offene Umgebung, auf der (f_n) gleichmäßig konvergent ist. Dies gilt für alle $x \in U$, somit ist (f_n) lokal gleichmäßig konvergent.

□

Wie in der reellen Analysis wollen wir auch Funktionenreihen betrachten. Wir sagen, dass eine Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ gleichmäßig bzw. lokal gleichmäßig auf U konvergiert, falls die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=1}^n f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig bzw. lokal gleichmäßig auf U konvergiert. Wir wiederholen einige Konvergenzkriterien für Funktionenreihen.

Satz 2.19. *1. Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f : U \to \mathbb{C}$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass*

$$\left|\sum_{n=k}^{l} f_n(z)\right| < \varepsilon$$

für alle $l \geq k \geq N$ und alle $z \in U$ gilt.

2. Sei die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergent (mit $a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) und gelte $\|f_n\|_U \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ auf U absolut und gleichmäßig konvergent (d.h., sowohl die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ als auch die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ ist gleichmäßig konvergent).

Der Vollständigkeit halber skizzieren wir den Beweis:

Beweis. 1. Dies ist nichts anderes als das Cauchy-Kriterium für Konvergenz von Folgen: Betrachte die Partialsummenfolge $S_n := \sum_{m=1}^{n} f_m$. Nach Definition ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ gleichmäßig konvergent genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N' \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ für alle $n > N'$ und alle $z \in U$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|S_l(z) - S_k(z)| < \varepsilon$ für alle $N \leq l \leq k$ und alle $z \in U$ ist, und dies ist genau die im Satz angegebene Bedingung.

2. Wir verwenden das eben bewiesene Kriterium: Wegen der Dreiecksungleichung haben wir für alle $m \geq n$ und alle $z \in U$ die Abschätzung

$$\left|\sum_{n=k}^{l} f_n(z)\right| \leq \sum_{n=k}^{l} |f_n(z)| \leq \sum_{n=k}^{l} a_n$$

Wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ gibt es nach dem Cauchy-Kriterium für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=k}^{l} a_n < \varepsilon$ für alle $N \leq k \leq l$ gilt. Also gilt die in 1. genannte Bedingung, und damit ist die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ gleichmäßig konvergent. Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ ist natürlich erst recht gleichmäßig konvergent, denn die Bedingung $\sum_{n=k}^{l} |f_n(z)| \leq \varepsilon$ für alle $N \leq k \leq l$ haben wir ja gerade auch abgeleitet.

□

Nun kommen wir zur versprochenen Konvergenzaussage für Reihen, welche das Beispiel der geometrischen Reihe weiter oben verallgemeinert.

Satz 2.20. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Entwicklungspunkt, und sei $P(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ ($a_n \in \mathbb{C}$) eine Reihe. Dann existiert ein $R \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ so dass $P(z)$ für $|z - z_0| < R$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert und für $|z - z_0| > R$ divergiert. Für die Zahl R gilt die Cauchy-Hadamard-Formel:*

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \tag{2.2}$$

Wir nennen die Zahl R den *Konvergenzradius* der Potenzreihe $P(z)$. Man sagt, dass $P(z)$ konvergiert, falls $R > 0$, für $R = 0$ heißt P divergent. Man beachte, dass wir im Allgemeine nichts über die Konvergenz von $P(z)$ für $|z| = R$ sagen können.
Man kann die Aussage des Satzes auch so umformulieren (siehe Lemma 2.18), dass für alle $r < R$ die Reihe $P(z)$ absolut und gleichmäßig auf $D_r(z_0) := \overline{B_r(z_0)} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ konvergiert.
Zum Beweis des Satzes benutzen wir die folgende Aussage.

Lemma 2.21 (Konvergenzlemma von Abel)**.** *Sei wie im Satz eine Entwicklungspunkt (d.h., eine komplexe Zahl) $z_0 \in \mathbb{C}$ fixiert. Sei $z_1 \neq z_0$ so gewählt, dass die Folge $(a_n \cdot (z_1 - z_0)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, dann konvergiert die Reihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ absolut und gleichmäßig auf allen abgeschlossenen Scheiben $D_r(z_0)$, wobei $r < |z_1 - z_0|$ ist.*

Beweis. Sei $M \in \mathbb{R}_{>0}$ so dass $|a_n(z_1 - z_0)^n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und sei $r < |z_1 - z_0|$. Dann gilt für alle $z \in D_r(z_0)$, dass

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n(z_1 - z_0)^n| \cdot \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n$$

Wegen $z \in D_r(z_0)$ und $r < |z_1 - z_0|$ ist $\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right| < 1$, d.h., die Reihe $\sum_{i\geq 0} \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|$ ist konvergent (geometrische Reihe). Dann konvergiert nach dem Majorantenkriterium (Satz 2.19, 2.) die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ für alle $z \in D_r(z_0)$ absolut und gleichmäßig.

□

Beweis des Satzes. Sei $R = 1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Angenommen, wir haben $0 < R \leq \infty$. Sei $r' < R$, dann ist $1/r' > 1/R$, und daher

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1/r'$$

also gilt für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}_0$, dass $|a_n| < (r')^{-n}$ ist. Damit ist die Folge $(a_n(r')^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt, und dann folgt aus dem Konvergenzlemma von Abel, dass für alle $r < r'$ die Reihe $P(z)$ in $D_r(z_0)$ absolut und gleichmäßig konvergent ist. Dies gilt dann natürlich für alle $r < R$ und dann ist $P(z)$ wegen Lemma 2.18 auf $B_R(z_0)$ lokal gleichmäßig konvergent.
Falls hingegen $z \in \mathbb{C}$ so gewählt ist, dass $|z - z_0| > R$ ist (diesmal darf auch $R = 0$ gelten), dann ist

$$\frac{1}{|z - z_0|} < \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dann muss für unendlich viele $n \in \mathbb{N}_0$ gelten, dass

$$\frac{1}{|z - z_0|^n} < |a_n|$$

ist, und dann kann $\lim_{n\mapsto\infty}(a_n(z - z_0)^n)$ nicht gleich Null sein, d.h., für dieses z ist $P(z)$ divergent. □

Als Konsequenz (unter Verwendung von 2.17) aus dem letzten Satz sehen wir, dass eine Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(z-z_0)^i$ auf $B_R(z_0)$ eine stetige Funktion darstellt. Tatsächlich gilt eine viel stärkere Aussage, welche zeigt, dass in der Funktionentheorie viele Dinge einfacher sind, als in der reellen Analysis.

Satz 2.22. *Sei eine Reihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ gegeben. Dann ist*

$$\begin{aligned} f : B_R(z_0) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto P(z) \end{aligned}$$

eine auf $B_R(z_0)$ holomorphe Funktion, mit Ableitung

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)a_{n+1}(z - z_0)^n.$$

Beweis. Um die Notation etwas zu vereinfachen, nehmen wir an, dass $z_0 = 0$ ist. Der allgemeine Fall funktioniert genauso, nur die Formeln sind etwas länger.
Wir beweisen zunächst, dass der Konvergenzradius der Reihe $g(z) := \sum_{n\geq 0}(n + 1)a_{n+1}z^n$ (er heiße R_g) gleich dem Konvergenzradius R der gegebenen Reihe $P(z)$ ist. Sei $0 \leq r < R_g$ gegeben, dann ist die Reihe $g(r) = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}r^n$ konvergent, insbesondere ist dann also die Folge $(n+1)|a_{n+1}|r^n$ beschränkt. Da für höchstens endlich viele n gilt, dass $n + 1 < r$ ist, haben wir

$$|a_{n+1}|r^{n+1} < (n + 1)|a_{n+1}|r^n$$

für fast alle (d.h., für alle bis auf endlich viele) $n \in \mathbb{N}_0$. Damit ist auch die Folge $|a_{n+1}|r^{n+1}$ beschränkt (oder, was dasselbe ist, die Folge $|a_n|r^n$), und damit konvergiert nach dem Abelschen Lemma die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_nz^n$ für alle $|z| < r$. Somit ist $r \leq R$, also haben wir $R_g \leq R$ bewiesen.

Sei nun andererseits ein r mit $0 \leq r < R$ gegeben. Sei außerdem s so gewählt, dass $r < s < R$ gilt, dann ist $\sum_{n\geq 0} a_n s^n$ konvergent, also die Folge $|a_n|s^n$ beschränkt. Wegen $r < s$, d.h., $r/s < 1$ ist die Folge $(r/s)^n$ eine Nullfolge, damit aber auch die Folge $n \cdot (r/s)^n$. Dann folgt aus der Beschränktheit von $|a_n|s^n$, dass auch die Folge

$$(|a_n|s^n) \cdot \frac{1}{r} \cdot n \left(\frac{r}{s}\right)^n = n|a_n|r^{n-1}$$

beschränkt ist. Damit ist auch die verschobene Folge $(n+1)|a_{n+1}|r^n$ beschränkt, und dies zeigt die Konvergenz von $g(z)$ für alle $|z| < r$, d.h., wir bekommen $r \leq R_g$. Somit haben wir auch $R \leq R_g$ also insgesamt $R = R_g$ bewiesen.
Wir müssen nun noch zeigen, dass die Reihe $f(z)$ in $B_R(z_0) = B_R(0)$ holomorph ist und dort die Ableitung $g(z)$ hat. Wir wählen eine komplexe Zahl b in $B_R(0) = B_{R_g}(0)$. Es gilt dann

$$z^n - b^n = (z-b) \cdot (\underbrace{z^{n-1} + z^{n-2}b + \ldots + zb^{n-2} + b^{n-1}}_{=:P_n(z)})$$

Nun sei $r < R$ so gewählt, dass $|b| < r$ ist. Dann gilt für alle $z \in D_r(0)$, dass

$$|a_n P_n(z)| \leq |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1}$$

ist, denn jeder der Terme $|z^{n-k}b^{k+1}|$ ist für $z \in D_r(0)$ kleiner oder gleich r^{n-1}, es gibt n solcher Terme, und man benutzt die Dreiecksungleichung. Da $g(r) = \sum_{n\geq 1} n \cdot a_n \cdot r^{n-1}$ wegen $r \in B_{R_g}(0)$ konvergiert, folgt aus Satz 2.19, 2., dass die Reihe

$$\Delta(z) := \sum_{n\geq 1} a_n \cdot P_n(z)$$

auf $D_r(0)$ gleichmäßig konvergent ist. Dies gilt für alle $r \in B_R(0)$, dann ist also $\Delta(z)$ auf $B_R(0)$ stetig. Außerdem haben wir die Gleichung

$$f(z) - f(b) = \sum_{n\geq 0} a_n(z^n - b^n) = (z-b) \cdot \sum_{n\geq 0} a_n P_n(z) = (z-b) \cdot \Delta(z),$$

wobei wir $P_0(z) := 0$ gesetzt haben. Aus der Stetigkeit von $\Delta(z)$ auf $B_R(0)$, insbesondere also bei b, schließen wir, dass $f(z)$ bei b differentierbar ist, mit Ableitung

$$f'(b) := \Delta(b) = \sum_{n\geq 0} a_n P_n(b) = \sum_{n\geq 1} a_n P_n(b) = \sum_{n\geq 1} a_n \cdot n \cdot b^{n-1} \stackrel{!}{=} g(b).$$

Damit ist bewiesen, dass $f'(z) = g(z)$ ist. □

Natürlich können wir den eben bewiesenen Satz auf die Potenzreihe f' anwenden. Damit erhalten wir durch Induktion das folgende Ergebnis.

Korollar 2.23. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und sei eine Potenzreihe $f = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ gegeben. Sei der Konvergenzradius R von f positiv, dann stellt f eine auf $B_R(z_0)$ beliebig oft (komplex) differentierbare (also holomorphe) Funktion dar. Es gilt für die Ableitungen von f*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n\geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(z-z_0)^{n-k}.$$

Insbesondere können wir die Koeffizienten von f durch die Formel

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

zurückgewinnen.

2.4 Elementare transzendente Funktionen

Wir können jetzt mit der entwickelten Theorie viele weitere interessante holomorphe Funktionen studieren. Insbesondere werden wir solche Funktionen untersuchen die weder Polynome noch rational (also Quotienten von Polynomen) sind. In gewisser Weise sind Polynome algebraische Funktionen, und transzendente sind solche, die nicht algebraisch sind. Was dies genau bedeutet, wird in einer extra Vorlesung „Algebra“ geklärt. Zuerst untersuchen wir die komplexe Exponentialfunktion: Sei

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n,$$

dann ist klar, dass f auf ganz $\mathbb{C}$ konvergent und dort also holomorph ist, denn aus der Analysis wissen wir, dass die reelle Exponentialreihe auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert (weil z.B. $\lim_{n\mapsto\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\mapsto\infty} z/(n+1) = 0$ ist für $a_n := z^n/n!$) d.h., falls R der (komplexe) Konvergenzradius von f ist, dann gilt $\mathbb{R} \subset B_R(0)$ und damit $R = \infty$. Wir schreiben $\exp(z)$ oder auch e^z für die so erhaltene Funktion aus $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ und nennen sie die komplexe Exponentialfunktion. Insbesondere stimmt $\exp(z)$ damit auf $\mathbb{R}$ mit der dort definierten Exponentialfunktion überein.

Lemma 2.24. *Die komplexe Exponentialfunktion erfüllt die folgenden Eigenschaften:*

1.
$$(\exp(z))' = \exp(z),$$

2. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*
$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w),$$
d.h. exp *ist ein Gruppenhomomorphismus*
$$\exp : (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot).$$

Beweis. 1. Wie wir in Korollar 2.23 gesehen haben, ist die Ableitung von $f(z)$ durch die gliedweise Differentiation der Reihe $\sum_{n\geq 0} 1/n! z^n$ gegeben. Also gilt

$$f'(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \cdot n \cdot z^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \cdot z^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \cdot z^n = f(z).$$

2. Für eine fest gewählte komplexe Zahl w betrachten wir die auf ganz $\mathbb{C}$ definierte Funktion $F(z) := \exp(z+w)\exp(-z)$. Dann gilt wegen der Leibniz- und der Kettenregel:

$$F'(z) = \exp(z+w)\exp(-z) - \exp(z+w)\exp(-z) = 0.$$

Da F auf ganz $\mathbb{C}$ definiert ist und überall die Ableitung 0 hat, ist F konstant. Es gilt nun

$$F(0) = \exp(w) \cdot \exp(0) = \exp(w),$$

da nach Definition der Exponentialreihe $\exp(0) = 1$ ist. Also ist der konstante Wert von $F(z)$ gleich $\exp(w)$, d.h., es gilt

$$\exp(z+w)\exp(-z) = \exp(w),$$

und diese Gleichung gilt für alle $w \in \mathbb{C}$, insbesondere können wir den Fall $w = 0$ betrachten und bekommen

$$\exp(z)\exp(-z) = 1.$$

Wir schlussfolgern, dass $\exp(z)$ immer ungleich 0 ist, und dass sein Inverses durch $\exp(-z)$ gegeben wird. Dann folgt der Gleichung $\exp(z+w)\exp(-z) = \exp(w)$ das gewünschte Additionstheorem

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w).$$

□

Als nächstes untersuchen wir die Reihen

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

und

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

Mit dem gleichen Argument wie bei der Exponentialfunktion sieht man, dass sie auf ganz $\mathbb{C}$ konvergieren, also in Funktionen in $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ darstellen, und natürlich setzen sie die reellen Sinus- und Kosinusfunktionen fort. Weiterhin erkennt man sofort aus den Potenzreichen von Sinus und Kosinus, dass

$$\sin(z)' = \cos(z) \qquad \text{und} \qquad \cos(z)' = -\sin(z)$$

und dass

$$\cos(z) = \cos(-z) \qquad \text{und} \qquad \sin(z) = -\sin(z)$$

gilt.
Nun erhalten wir einen wunderschönen Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion bzw. Exponentialreihe und den Reihen für den Kosinus bzw. den Sinus. Setzt man nämlich in die Exponentialfunktion den Wert iz ein, so bekommt man

$$\begin{aligned}
\exp(iz) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-1)^n z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} i^{2n+1} z^{2n+1} \\
&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-1)^n z^{2n} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n z^{2n+1} \\
&= \cos(z) + i \cdot \sin(z).
\end{aligned}$$

Natürlich ist auch $\exp(-iz) = \cos(z) - i\sin(z)$, so dass wir auch die trigonometrischen Funktionen durch die Exponentialfunktion ausdrücken können:

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

Natürlich können wir die Formel $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$ auch für den Spezialfall $z = \theta \in \mathbb{R}$ betrachten, dann sind $\cos(\theta)$ und $\sin(\theta)$ reelle Zahlen, und daher ist $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ gerade die Zerlegung von $\exp(i\theta)$ in Real- und Imaginärteil. Also gilt $|\exp(i\theta)| = 1$ und $\theta = \arg(\exp(i\theta))$. Schreiben wir hingegen $z = x + iy$ für eine beliebige komplexe Zahl z (mit $x, y \in \mathbb{R}$), dann ist

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \cdot \exp(iy) = \exp(x) \cdot (\cos(y) + i\sin(y)),$$

also haben wir

$$|\exp(z)| = \exp(x) = \exp(\Re(z)) \qquad \text{und} \qquad \arg(\exp(z)) = y = \Im(z) \mod 2\pi.$$

Wir sehen auch, dass gilt:

$$\exp(z) = 1 \iff |\exp(z)| = 1 \text{ und } \arg(\exp(z)) = 0 \iff \Re(z) = 0 \text{ und } \Im(z) = 2k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Also ist $\exp(z) = 1$ genau dann, wenn $z = 2\pi i k$ für eine ganze Zahl k ist.
Damit sehen wir, dass die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

folgende Eigenschaften hat:

1. Sie bildet Punkte mit konstantem Realteil (also komplexe Zahlen der Form $z = x_0 + iy$ für fest gewähltes $x_0 \in \mathbb{R}$) auf Kreise in $\mathbb{C}^*$ um den Nullpunkt mit Radius $\exp(x_0)$ ab.
2. Sie bildet Punkte mit konstantem Imaginärteil $z = x + iy_0$ auf Halbgeraden in $\mathbb{C}^*$ mit festem Winkel $\arg(\exp(z)) = y_0 \mod 2\pi$ ab.

Wir sehen durch Verwendung von Lemma 2.24, 2. auch sofort, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, dass

$$\exp(z + 2k\pi i) = \exp(z)\exp(2k\pi i) = \exp(z)$$

ist, also ist die Exponentialfunktionen periodisch mit der Periode $2\pi i$. Es gilt sogar etwas stärkeres: Falls $\exp(z_1) = \exp(z_2)$ ist, dann folgt, wenn wir $z_1 - z_2 = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ setzen, dass $\exp(x)(\cos(y) + i\sin(y)) = 1$, also $x = 0$, $\cos(y) = 1$ und $\sin(y) = 0$ ist, also $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$, daher ist also $2\pi i$ die einzige Periode der Exponentialfunktion. Man kann auch sagen, dass der Kern der Gruppenhomomorphismus $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ genau die Untergruppe $2\pi i\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ ist. Wir sehen auch, dass für alle $a \in \mathbb{C}$ der Streifen

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, a \leq \Im(z) < a + 2\pi i\}$$

durch exp bijektiv auf $\mathbb{C}^*$ abgebildet wird.
Natürlich können wir auch weitere trigonometrische Funktionen, wie z.B.

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = -i\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{\exp(iz) + \exp(-iz)}$$

oder

$$\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = i\frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{\exp(iz) - \exp(-iz)}$$

auf die Exponentialfunktion zurückführen. Insbesondere kann man viele Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, z.B. Additionstheoreme, einfach aus den schon bewiesenen Eigenschaften der Exponentialfunktion ableiten. Zum Beispiel erhalten wir

$$\cos(w + z) = \tfrac{1}{2}(\exp(i(w + z)) + \exp(-i(w + z)) = \tfrac{1}{2}(\exp(iw)\exp(iz) + \exp(-iw)\exp(-iz))$$

$$= \tfrac{1}{4}(\exp(iw) + \exp(-iw))(\exp(iz) + \exp(-iz)) + \tfrac{1}{4}(\exp(iw) - \exp(-iw))(\exp(iz) - \exp(-iz))$$

$$= \tfrac{1}{2}(\exp(iw) + \exp(-iw))\tfrac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)) - \tfrac{1}{2i}(\exp(iw) - \exp(-iw))\tfrac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$$

$$= \cos(w)\cos(z) - \sin(w)\sin(z).$$

Analog erhält man $\sin(w + z) = \sin(w)\cos(z) + \cos(w)\sin(z)$.

Kapitel 3

Integralrechnung im Komplexen

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Integration komplexer Funktionen befassen.

3.1 Wegintegrale

Ein Integral der Form

$$\int_{z_2}^{z_2} f(x)dx,$$

(für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$) wie wir es aus der Analysis im Reellen kennen, macht für komplexe Funktionen a priori keinen Sinn, weil nicht klar ist, wie man vom Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ nach $z_2 \in \mathbb{C}$ kommt. Wir müssen daher spezifizieren, über welche Menge von Punkten $x \in \mathbb{C}$ integriert werden soll. Dies leisten die sogenannten Wege oder Kurven in $\mathbb{C}$.

Definition 3.1. *Sei¡ $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Dann nennen wir eine Abbildung $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ einen Weg oder eine Kurve in $\mathbb{C}$. γ heißt stückweise stetig, falls es eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ gibt, so dass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Einschränkung $\gamma_{|(t_{i-1},t_i)} : (t_{i-1}, t_i) \to \mathbb{C}$ stetig ist und auf $[t_{i-1}, t_i]$ stetig fortgesetzt werden kann. Die Abbildung γ heißt stückweise differentierbar, falls γ auf ganz $[a,b]$ stetig ist und falls es eine Unterteilung von $[a,b]$ gibt, so dass γ auf (t_{i-1}, t_i) stetig differentierbar ist und so, dass γ' stetig auf $[t_{i-1}, t_i]$ fortsetzbar ist. Ein stückweise differentierbarer Weg heißt* Integrationsweg. *Wir besprechen noch die folgenden Begriffe über Wege: $\gamma(a)$ heißt* Anfangspunkt *von γ, $\gamma(b)$ heißt* Endpunkt. *Das Bild $\gamma([a,b]) =: Sp(\gamma)$ heißt die Spur des Weges γ. Falls $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet ist, und falls $Sp(\gamma) \subset U$ gilt, dann nennen wir γ einen Weg in U. γ heißt geschlossen, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt. Für einen gegebenen Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt $\gamma^{-1} := \gamma \circ \sigma$, mit $\sigma : [a,b] \to [a,b]$, $t \mapsto a + b - t$ der* Umkehrweg *von γ.*

Wir zeichnen Wege häufig durch ihre Spur, und geben mit einem Pfeil die Richtung an, so wie im Bild 3.1 unten dargestellt. Ein Weg γ und sein Umkehrweg γ^{-1} haben dann die gleiche Spur, aber entgegengesetzte Richtung.
Beispiele für Integrationswege:

1. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & z_0 + R\exp(it) \end{array}$$

   ein stetig differentierbarer Weg, nämlich eine Kreislinie vom Radius R um den Mittelpunkt z_0. γ ist ein geschlossener Integrationsweg. Man nennt die durch γ gegeben Richtung auch die *positive Umlaufsrichtung* (wogegen die negative Umlaufsrichtung durch $\gamma^{-1} : t \mapsto z_0 + R\exp(-it)$ gegeben wird).

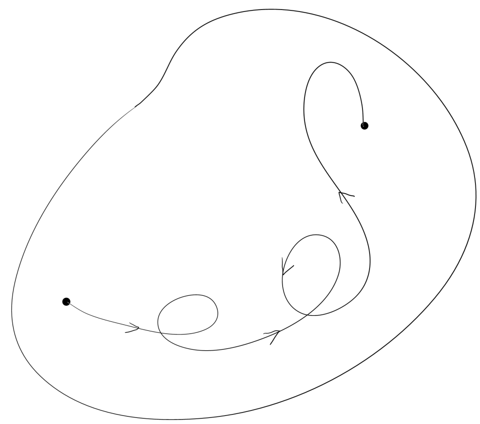

Abbildung 3.1: Wege in der komplexen Ebene.

2. Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, und sei
$$\begin{array}{rcl} \gamma_{z_1\, z_2} : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & tz_2 + (1-t)z_1 \end{array}$$
Dies ist offensichtlich ein (stetig differentierbarer) Integrationsweg, nämlich die Strecke von z_1 nach z_2. Man beachte, dass für $z_1, z_2 \in U$ für eine Menge U (sogar für Gebiete U), die Spur $\mathrm{Sp}(\gamma_{z_1\, z_2})$ nicht notwendigerweise in U liegen muss, wie das Bild 3.2 zeigt. Wir schreiben manchmal auch kurz $[z_1, z_2]$

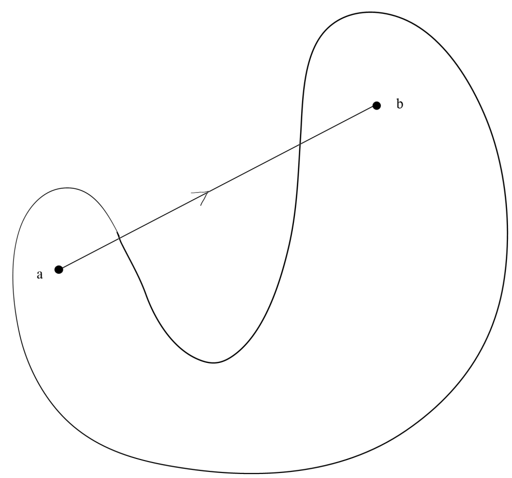

Abbildung 3.2: Gerade

für den durch γ gegebenen Integrationsweg.

3. Das letzte Beispiel läßt sich verallgemeinern: Seien Punkte $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ gegeben, dann definieren wir den stetigen, aber im Allgemeinen nur stückweise differentierbaren Integrationsweg
$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0,n] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & z_k + (t-k)(z_{k+1} - z_k) \quad \text{falls } t \in [k, k+1]. \end{array}$$
Wir schreiben auch kurz $[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ für γ. Speziell ist für $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ der geschlossene Weg $\gamma = [z_0, z_1, z_2, z_0]$ der Rand $\partial\Delta$ des durch die drei Punkte z_0, z_1, z_2 gegebenen Dreiecks $\Delta \subset \mathbb{C}$.

4. Wir können allgemeiner zwei oder mehrere Integrationswege zusammensetzen: Seien $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ zwei solcher Wege, so dass $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ gilt. Dann definiert die Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma_1\gamma_2 : [a, b+(d-c)] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{falls } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t+c-b) & \text{falls } t \in [b, b+(d-c)] \end{cases} \end{aligned}$$

einen Integrationsweg, genannt die Zusammensetzung der Wege γ_1 und γ_2. Analog können wir gegebene Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ zusammensetzen, falls für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt, dass der Endpunkt von γ_i gleich dem Anfangspunkt von γ_{i+1} ist.

Als nächstes müssen wir Integral eines Weges über das Intervall $[a,b]$ definieren. Dies ist einfach, wir betrachten die Zerlegung in Real- und Imaginärteil.

Definition 3.2. *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion. Dann definieren wir*

$$\int_a^b \gamma(t)dt := \int_a^b \Re(\gamma(t))dt + i \cdot \int_a^b \Im(\gamma(t))dt.$$

wobei das Integral hier das in der Analysis eingeführte Riemann-Integral ist. Man beachte, dass dieses für Funktionen, welche an endlich vielen Punkten nicht stetig sind, wohldefiniert ist.

Für diese Integrale gelten folgende Regeln.

Lemma 3.3. *1. $\int_a^b$ ist ein $\mathbb{C}$-linearer Operator (d.h. $\int_a^b (z\gamma + \beta)(t)dt = z\int_a^b \gamma(t)dt + \int_a^b \beta(t)dt$ für alle Integrationswege γ, β und alle $z \in \mathbb{C}$), und es gilt*

$$\overline{\int_a^b \gamma(t)dt} = \int_a^b \overline{\gamma(t)}dt.$$

2. Sei $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von γ, d.h., gelte $\Gamma' = \gamma$, dann ist $\int_a^b \gamma(t)dt = \Gamma(b) - \Gamma(a)$.

3. Es gilt

$$\left| \int_a^b \gamma(t)dt \right| \le \int_a^b |\gamma(t)|dt.$$

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften folgen sofort durch Betrachtung der Real- und Imaginärteile aus den entsprechenden Eigenschaften von reellen Integralen. Die Abschätzung im Punkt 3. ist klar, falls $\int_a^b \gamma(t)dt = 0$ gilt. Wir nehmen also an, dass $\int_a^b \gamma(t)dt \neq 0$ ist. Für alle reellen Zahlen s gilt nun

$$\Re\left(\exp(is) \cdot \int_a^b \gamma(t)dt\right) = \int_a^b \Re(\exp(is)\gamma(t)dt) \le \int_a^b |\exp(is)\gamma(t)|dt = \int_a^b |\gamma(t)|dt.$$

Für den Spezialfall $s = -\arg(\int_a^b \gamma(t)dt)$ erhalten wir (wegen $|z| = \Re\left(\exp(-i\arg(z)) \cdot z\right) = \exp(-i\arg(z)) \cdot z$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$):

$$\left|\int_a^b \gamma(t)dt\right| = \Re\left(\exp\left(-i\arg\left(\int_a^b \gamma(t)dt\right)\right) \cdot \int_a^b \gamma(t)dt\right) \le \int_a^b |\gamma(t)|dt.$$

$\square$

Wir können nun endlich die uns eigentlich interessierenden Integrale von komplexen Funktionen über Integrationswege einführen.

Definition 3.4. *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg mit Spur $Sp(\gamma)$ und sei $f : Sp(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig. Insbesondere können wir für eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit $Sp(\gamma) \subset U$ die Einschränkung $f_{|Sp(\gamma)}$ betrachten. Dann setzen wir*

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt.$$

Wir nennen $\int_\gamma f(z)dz$ das Weg- oder Kurvenintegral von f über γ.

Man beachte, dass das Integral wohldefiniert ist, da der Integrant eine stückweise stetige Funktion ist (weil der Integrationsweg γ stückweise differentierbar ist).
Bevor wir die Eigenschaften von Kurvenintegralen studieren, berechnen wir einige Beispiele:

1. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und eine reelle Zahl $R > 0$ gegeben. Sei $\partial D_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = R\}$ die Kreislinie vom Radius R um z_0. Diese wird vom Integrationsweg

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto z_0 + R\exp(it) \end{aligned}$$

parametrisiert. Wir integrieren jetzt die Funktion $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ über γ. Man beachte, dass f nicht auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist (nämlich genau nicht bei z_0), aber auf $\mathrm{Sp}(\gamma) = \partial D_R(z_0)$. Wir erhalten

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R\exp(it)} \cdot i \cdot R\exp(it)dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i. \tag{3.1}$$

Man beachte, dass dieses Ergebnis unabhängig vom gewählten Radius R ist.

Man kann ohne Übertreibung sagen, dass dieses Integral die Grundlage der Funktionentheorie darstellt. Warum das so ist, werden wir in den späteren Kapiteln noch sehen. Weiter unten (siehe Formel (3.2) werden wir eine Ergänzung dieser Formel beweisen).

2. Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0$ konstant, dann gilt (wegen $\gamma'(t) = 0$), dass $\int_\gamma f(z)dz = 0$ ist für alle Funktionen f.

3. Sei $f(z) = |z|$ und $\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \exp(i(\pi - t))$ sowie $\gamma_2 : [-1, 1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto t$. Man beachte, dass $\mathrm{Sp}(\gamma_1) \neq \mathrm{Sp}(\gamma_2)$ gilt, aber die Anfangspunkte bzw. die Endpunkte von γ_1 und γ_2 sind gleich (nämlich gleich 1 bzw. -1). Dann ist

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^\pi \underbrace{|\exp(i(\pi - t))|}_{=1} \cdot \gamma_1'(t)dt = \int_0^\pi \gamma_1'(t)dt = \gamma_1(\pi) - \gamma_1(0) = 1 - (-1) = 2$$

aber

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-1}^1 |t|dt = \int_{-1}^0 (-t)dt + \int_0^1 tdt = -\frac{1}{2}t^2\Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Wir sehen also, dass wir für zwei gegebene Punkte z_1, z_2 in $\mathbb{C}$ wirklich über Integrationswege von z_1 nach z_2 integrieren, und dass das Ergebnis von der Wahl dieser Wege abhängen kann.

Wir erläutern nun die wichtigesten Eigenschaften von Kurvenintegralen.

Satz 3.5. *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg.*

1. *Das Kurvenintegral ist $\mathbb{C}$-linear, d.h., für alle stetigen Funktionen $f, g : Sp(\gamma) \to \mathbb{C}$ und für alle $c \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\int_\gamma (cf + g)(z)dz = c\int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz,$$

2. *Es gilt*
$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq L(\gamma)\cdot \sup_{z\in Sp(\gamma)}|f(z)|,$$
hierbei ist
$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{(\Re^2(\gamma'(t)) + \Im^2(\gamma'(t))}dt$$
die Länge des Weges γ (man beachte, dass $L(\gamma) < \infty$ ist, weil $|\gamma'(t)|$ eine stückweise stetige, also integrierbare Funktion ist, man sagt, γ ist rektifizierbar*).*

3. *Sei $[a', b']$ ein weiteres Intervall in $\mathbb{R}$, und sei $\alpha : [a', b'] \to [a, b]$ eine stückweise stetig differentierbare Funktion, mit $\alpha(a') = a$, $\alpha(b') = b$ und mit $\alpha'(s) > 0$ für alle $s \in [a', b']$ (an den Unstetigkeitsstellen von α sollen beide einseitigen Grenzwerte positiv sein). Dann ist $\gamma\circ\alpha : [a', b'] \to \mathbb{C}$ wieder ein Integrationsweg, und es gilt*
$$\int_{\gamma\circ\alpha} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

4. *Es gilt*
$$\int_\gamma f(z)dz = -\int_{\gamma^{-1}} f(z)dz,$$
es sei daran erinnert, dass γ^{-1} der Umkehrweg von γ ist.

5. *Seien $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ Integrationswege, welche sich zusammensetzen lassen (d.h. der Endpunkt von γ_i ist der Anfangspunkt von γ_{i+1}). Dann gilt*
$$\int_{\gamma_1\cdots\gamma_n} f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$

6. *Es gilt die folgende Transformationsformel: Seien U, V Gebiete, sei $g : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung mit $\mathrm{Im}(g) \subset V$ mit stetiger Ableitung (wir werden später sehen, dass diese Bedingung automatisch erfüllt ist). Sei $\gamma : [a, b] \to U$ ein stetig differentierbarer Weg, dann gilt für alle stetigen Funktionen $f : V \to \mathbb{C}$*
$$\int_{g\circ\gamma} f(z)dz = \int_\gamma f(g(\zeta))g'(\zeta)d\zeta$$

Beweis. 1. Dies folgt direkt aus Lemma 3.3, 1.

2. Auch diese Eigenschaft folgern wir aus Lemma 3.3, und zwar aus Punkt 3. dieses Lemmas, dieser liefert uns:
$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt \leq \int_a^b \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|\cdot|\gamma'(t)|dt$$
$$= \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|\cdot \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \sup_{z\in \mathrm{Sp}(\gamma)} |f(z)|\cdot L(\gamma).$$

3. Es ist
$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\circ\alpha} f(z)dz &= \int_{a'}^{b'} f(\gamma(\alpha(s))\cdot(\gamma(\alpha(s))'ds \\
&= \int_{a'}^{b'} f(\gamma(\alpha(s))\cdot\gamma'(\alpha(s))\cdot\alpha'(s)ds \\
&\overset{*}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt \\
&= \int_\gamma f(z)dz.
\end{aligned}$$

Hierbei beweist man die Gleichheit (*) durch eine entsprechende Aussage zur Substitution für reelle Integrale (indem man wieder Real- und Imaginärteil getrennt untersucht).

4. Nach Definition des Umkehrweges haben wir

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(a+b-t)) \cdot (\gamma(a+b-t))'dt = -\int_a^b f(\gamma(\underbrace{a+b-t}_{=:s})) \cdot \gamma'(a+b-t)dt$$

$$= -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = -\int_\gamma f(z)dz.$$

5. Dieser Punkt ergibt sich sofort aus der Definition.

6. Es ist

$$\begin{aligned}\int_{g\circ\gamma} f(z)dz &= \int_a^b f(g(\gamma(t)))(g\circ\gamma)'(t)dt = \int_a^b f(g(\gamma(t))) \cdot (g'(\gamma(t))\gamma'(t))\,dt \\ &= \int_a^b (f(g(\gamma(t)))g'(\gamma(t))) \cdot \gamma'(t)dt \\ &= \int_\gamma f(g(\zeta))g'(\zeta)d\zeta\end{aligned}$$

□

Zur Vereinfachung der Notation setzen wir noch

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz := \int_{\gamma_{z_1\,z_2}} f(z)dz,$$

falls $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und falls $\gamma_{z_1\,z_2} : [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto tz_2 + (1-t)z_1$ die z_1 und z_2 verbindende Gerade ist.
Falls wir wie im Beispiel oben über eine Kreislinie $\partial D_R(z_0)$ integrieren, dann schreiben wir

$$\int_{|z-z_0|=R} f(z)dz := \int_{\partial D_R(z_0)} f(z)dz := \int_\gamma f(z)dz$$

mit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + R\exp(it)$. Wegen der eben bewiesenen Unabhängigkeit der Parametrisierung ist die Notation konsistent: Das Integral hängt nur von der Kreislinie $\partial D_R(z_0)$ ab, aber nicht von der gewählten Abbildung γ mit $\mathrm{Sp}(\gamma) = \partial D_R(z_0)$.

3.2 Stammfunktionen

Wie in der reellen Analysis kann man auch Kurvenintegrale leicht ausrechnen, wenn man vom Integranden eine Stammfunktion kennt. Hier ist die präzise Definition.

Definition 3.6. *Sei U ein Gebiet, und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Eine holomorphe Funktion $F : U \to \mathbb{C}$, so dass $F' = f$ ist, heißt Stammfunktion von f.*

Hat eine Funktion eine Stammfunktion, gilt das folgende schöne Ergebnis.

Satz 3.7. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig mit Stammfunktion $F \in \mathcal{O}(U)$. Sei $\gamma : [a,b] \to U$ ein Integrationsweg, mit $\gamma(a) = z_1$ und $\gamma(b) = z_2$. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Aufgrund dieses Satzes heißt eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, welche auf U eine Stammfunktion besitzt, auch eine *integrable* Funktion.

Beweis. Der Integrationsweg γ ist stückweise stetig differentierbar, sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ eine Unterteilung von $[a, b]$, so dass $\gamma_{|[t_{i-1},t_i]}$ stetig differentierbar ist (für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_\gamma f(z)dz &= \textstyle\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (F \circ \gamma)'(t)dt \\
&\overset{(*)}{=} \textstyle\sum_{i=1}^n ((F \circ \gamma)(t_i) - (F \circ \gamma)(t_{i-1})) \\
&= F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_0)) = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)) = F(z_2) - F(z_1).
\end{aligned}$$

Die Gleichung (*) ist nichts anderes als der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für reelle Funktionen, indem man nämlich $\Re(F \circ \gamma)'$ und $\Im(F \circ \gamma)'$ betrachtet, dies sind auf $[t_{i-1}, t_i]$ stetige reelle Funktionen (denn $(F \circ \gamma)' = (f \circ \gamma) \cdot \gamma'$), d.h., sie sind auf (t_{i-1}, t_i) stetig und stetig auf $[t_{i-1}, t_i]$ fortsetzbar, und für diese können wir den Hauptsatz anwenden. □

Als Beispiel betrachten wir die folgende Erweiterung der fundamentalen Berechung aus Formel (3.1): Sei $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} (R\exp(it))^n \cdot i \cdot R\exp(it)dt \\
&= iR^{n+1} \cdot \int_0^{2\pi} \exp((n+1)it)dt \\
&= \tfrac{iR^{n+1}}{i(n+1)} [\exp((n+1)i \cdot 2\pi) - \exp((n+1)i \cdot 0)] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Wir erhalten die beiden folgenden einfachen, aber wichtigen Konsequenzen.

Korollar 3.8. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ integrabel, d.h., es gibt eine Stammfunktion $F \in \mathcal{O}(U)$ von f. Dann gilt*

1. *Für zwei Integrationswege γ_1, γ_2 mit gleichem Anfangs- und Endpunkt ist $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$.*
2. *Ist γ ein geschlossener Integrationsweg, dann gilt*
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Beweis. 1. Sei z_1 der Anfangspunkt von γ_1 und γ_2 und sei z_2 der Endpunkt. Dann haben wir

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1).$$

2. Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg, dann gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$, und damit bekommen wir
$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)) = 0.$$

□

Wenn wir nochmals das dritte Beispiel auf Seite 27 betrachten, dann sehen wir, dass die Funktion $z \mapsto |z|$ nicht integrabel ist, denn das Wegintegral dieser Funktion hängt nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt eines Integrationsweges ab. Somit sind nicht alle stetigen Funktionen integrabel.
Beispiele:

1. Sei $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$. Dann ist die Funktion z^n auf $\mathbb{C}^*$ stetig und holomorph (für $n \in \mathbb{N}$ sogar auf ganz $\mathbb{C}$), und integrabel, denn die auf $\mathbb{C}^*$ bzw. (für $n \in \mathbb{N}$) auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion
$$F(z) := \frac{1}{n+1} z^{n+1}$$
ist eine Stammfunktion, es gilt $F'(z) = f(z)$. Für jeden Weg γ mit Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_2 ist
$$\int_\gamma z^n dz = \frac{1}{n+1}\left(z_2^{n+1} - z_1^{n+1}\right).$$

2. Wir können damit Polynome integrieren, es ist für $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ durch $F(z) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} a_k z^{k+1}$ eine Stammfunktion gegeben.

3. Wegen
$$\int_{|z|=R} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$
(siehe Formel (3.1)) hat die auf $\mathbb{C}^*$ definierte (und dort sogar holomorphe) Funktion $1/z$ keine Stammfunktion.

Wir sehen am letzten Beispiel, dass das Verschwinden von Integralen über geschlossene Wege zumindest eine notwendige Bedingung für die Integrabilität einer Funktion ist. Tatsächlich ist dies in gewissen Situationen sogar hinreichend, wie wir jetzt zeigen wollen. Dazu benötigen wir zunächst einen Begriff.

Definition 3.9. *Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, dann heißt M* sternförmig*, falls es ein $c \in M$ gibt, so dass $[c, x] \subset M$ für alle $x \in M$ gilt (Zur Erinnerung: $[c, x] := \{tc + (1-t)x \,|\, t \in [0, 1]\}$ ist die c und x verbindende Gerade). Ein Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ heißt Sterngebiet, wenn es sternförmig ist.*

Im Bild 3.3 sind mehrere Beispiele dargestellt: Das Gebiet (a) ist konvex, und daher offensichtlich sternförmig (jeder Punkt kann als Zentrum c benutzt werden). Das Gebiet (b) ist nicht konvex, aber trotzdem gibt es Punkte c, welche die Zentrumseigenschaft erfüllen. Das Gebiet (c) soll die „geschlitzte“ komplexe Ebene, d.h., die Menge $S_\varphi := \mathbb{C}\backslash\{r \cdot \exp(i\varphi) \,|\, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ für ein festes $\varphi \in [0, 2\pi)$ darstellen (im Bild ist $\varphi = \pi$). Man überlegt sich leicht, dass alle Punkte $r \exp(i\theta)$ mit $r > 0$ und $\theta = \varphi + \pi \mod 2\pi$ als Zentrum genutzt werden können. Schließlich ist das Gebiet (d) ein Beispiel für eine Menge, welche nicht sternförmig ist, man findet kein Zentrum c, so dass $[cx]$ für alle x in dieser Menge liegt.
Damit haben wir die folgenden zwei Charakterisierungen von integrablen Funktionen.

Satz 3.10. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt:*

1. *Falls für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in U*
$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$
ist, dann hat f in U eine Stammfunktion.

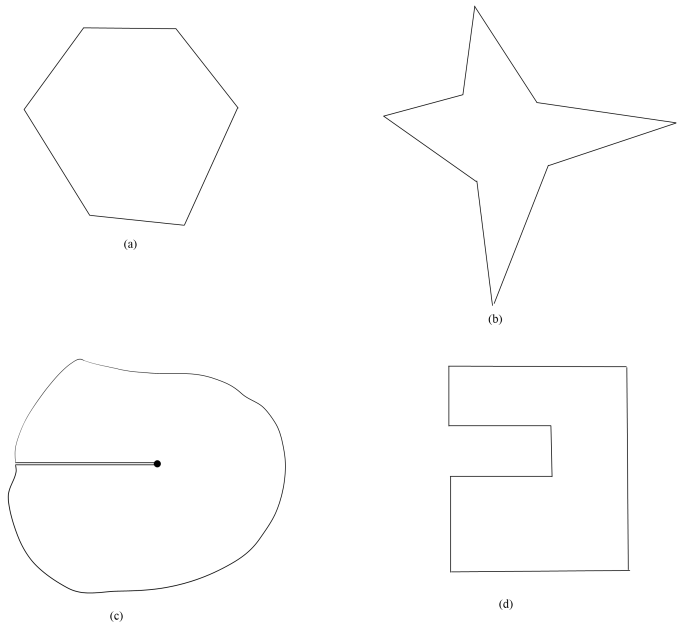

Abbildung 3.3: Sterngebiete und Nicht-Sterngebiet.

2. *Sei U sternförmig mit Zentrum c. Falls für alle $x, y, w \in U$*

$$\int_{[x,y,w,x]} f(z)dz = 0$$

gilt, dann ist f auf U integrabel.

Beweis. 1. Sei $a \in U$ fest, und sei für alle $z \in U$ einen Weg γ_z von a nach z gewählt. Wir setzen dann

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta.$$

Wir wollen nun zeigen, dass F eine Stammfunktion von f ist, d.h., dass $F'(z_0) = f(z_0)$ für alle $z_0 \in U$ gilt. Dann ist F automatisch holomorph auf U. Da U offen ist, existiert ein $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subset U$. Wähle ein $z \in B_r(z_0)$, dann gilt $[z_0 z] \in U$. Wir betrachten den zusammengesetzten Integrationsweg

$$\gamma := \gamma_{z_0}[z_0 z]\gamma_z^{-1},$$

welcher a sowohl als Anfangs- als auch als Endpunkt hat. Damit ist γ ein geschlossener Integrationsweg in U, und nach Voraussetzung gilt

$$0 = \int_\gamma f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z_0 z]} f(\zeta)d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta.$$

Aus dieser Gleichung und aus der Definition von F folgt:

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta - \int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)d\zeta = \int_{[z_0 z]} f(\zeta)d\zeta = \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz) \cdot ((1-t)z_0 + tz)'dt.$$

Dieses letzte Integral ist nichts anderes als

$$\int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)dt = (z - z_0) \cdot \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))dt.$$

Setzte $A(z) := \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))dt$, dann ist

$$F(z) - F(z_0) = (z - z_0) \cdot A(z)$$

und wir müssen zeigen, dass A bei z_0 stetig ist, dann ist F nach Definition dort differentierbar, mit Ableitung $A(z_0) = \int_0^1 f(z_0)dt = f(z_0) \int_0^1 dt = f(z_0)$. Es gilt nun aber

$$|A(z) - A(z_0)| = |A(z) - f(z_0)| = \left| \int_0^1 (f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0))\, dt \right| \leq \max_{t \in [0,1]} |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)|$$

Da f stetig ist, d.h., da $\lim_{z \mapsto z_0} f(z) = f(z_0)$ gilt, erhalten wir

$$\lim_{z \mapsto z_0} |A(z) - A(z_0)| = 0,$$

und damit ist die Stetigkeit von A bei z_0 gezeigt.

2. Der Beweis ist recht analog zum ersten Fall: Sei wieder $z \in U$ beliebig, dann liegt wegen der Sternförmigkeit von U die Gerade $[cz]$ vollständig in U und wir definieren $F(z) := \int_{[cz]} f(\zeta)d\zeta$.

   Sei $r > 0$ so, dass $B_r(z) \subset U$ liegt, und sei $z_0 \in B_r(z)$. Dann liegt die Dreieckslinie $[czz_0c]$ ganz in U, und wir haben nach Voraussetzung $\int_{[czz_0c]} f(\zeta)d\zeta = 0$, also

$$0 = \int_{[cz]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[zz_0]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z_0c]} f(\zeta)d\zeta = F(z) + \int_{[zz_0]} f(\zeta)d\zeta - F(z_0)$$

   Somit erhalten wir wieder $F(z) - F(z_0) = \int_{[zz_0]} f(\zeta)d\zeta = (z - z_0) \cdot \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))dt$, und wir können den Beweis exakt wie oben im Punkt 1. zu Ende führen.

□

3.3 Der Integralsatz und die Integralformel von Cauchy

Wir behandeln in diesem Abschnitt eines der wichtigsten Ergebnisse der Funktionentheorie. Viele weitere Resultate, die wir später noch diskutieren werden, basieren auf diesem.
Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass eine Funktion zumindest auf Sterngebieten integrabel ist, d.h., eine Stammfunktion besitzt, falls das Integral über alle Dreieckslinien verschwindet. Die wichtigste Klasse von Funktionen, welche wir betrachten, sind die holomophen Funktionen, und genau für diese gilt der nächste Satz.

Satz 3.11 (Integralsatz von Goursat)**.** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\Delta \subset U$ ein Dreieck. Sei $f \in \mathcal{O}(U)$ holomorph, dann gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Beweis. Seien a, b, c die Ecken des Dreiecks Δ und wir schreiben $\Delta = \Delta(a, b, c)$. Wir unterteilen Δ in 4 Teildreiecke, indem wir setzen

$$a' := \frac{b + c}{2} \quad ; \quad b' := \frac{a + c}{2} \quad ; \quad c' := \frac{a + b}{2}$$

sowie

$$\Delta_1 := \Delta(a, c', b') \quad ; \quad \Delta_2 := \Delta(b, a', c') \quad ; \quad \Delta_3 := \Delta(c, b', a') \quad ; \quad \Delta_4 := \Delta(a', b', c')$$

(siehe das Bild 3.4).

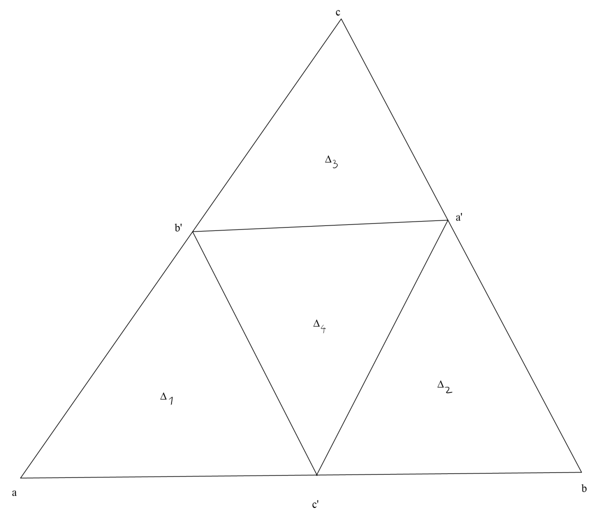

Abbildung 3.4: Zerlegung.

Dann ist $\Delta = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_4$, und wir haben

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta} f(z)dz &= \int_{[a,b,c,a]} f(z)dz = \int_{[a,b]} f(z)dz + \int_{[b,c]} f(z)dz + \int_{[c,a]} f(z)dz \\
&= \int_{[a,c']} f(z)dz + \int_{[c',b]} f(z)dz + \int_{[b,a']} f(z)dz + \\
&\quad \int_{[a',c]} f(z)dz + \int_{[c,b']} f(z)dz + \int_{[b',a]} f(z)dz \\
&= \int_{[a,c']} f(z)dz + \int_{[c',b']} f(z)dz + \int_{[b',a]} f(z)dz + \\
&\quad \int_{[c',b]} f(z)dz + \int_{[b,a']} f(z)dz + \int_{[a',c']} f(z)dz + \\
&\quad \int_{[a',c]} f(z)dz + \int_{[c,b']} f(z)dz + \int_{[b',a']} f(z)dz \\
&- \int_{[a',b']} f(z)dz - \int_{[b',c']} f(z)dz - \int_{[c',a']} f(z)dz \\
&= \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_4} f(z)dz
\end{aligned}
$$

wobei $\partial\Delta_1, \ldots, \partial\Delta_4$ folgendermaßen orientiert sind

$$
\begin{aligned}
\partial\Delta_1 &= [ac'b'a] \\
\partial\Delta_2 &= [ba'c'b] \\
\partial\Delta_3 &= [cb'a'] \\
\partial\Delta_4 &= [a'c'b'a'].
\end{aligned}
$$

Damit können wir abschätzen

$$
\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq \sum_{i=1}^{4} \left| \int_{\partial\Delta_i} f(z)dz \right| \leq 4 \max_{i=1,\ldots,4} \left| \int_{\partial\Delta_i} f(z)dz \right|.
$$

Sei $m_1 \in \{1, \ldots, 4\}$ so, dass $\left| \int_{\partial\Delta_{m_1}} f(z)dz \right| = \max_{i=1,\ldots,4} \left| \int_{\partial\Delta_i} f(z)dz \right|$ gilt. Wir wenden jetzt die gleiche Konstruktion auf Δ_{m_1} an, d.h., wir unterteilen dieses Dreieck in 4 Dreiecke $\Delta_1', \ldots, \Delta_4'$, und wieder soll

$m_2 \in \{1, \dots, 4\}$ der Index sein, so dass das Integral $\left|\int_{\partial\Delta'_{m_2}} f(z)dz\right|$ maximal ist. Durch Iteration erhalten wir so eine absteigende Folge

$$\Delta = \Delta^{(0)} \supset \Delta^{(0)} \supset \Delta^{(0)} \supset \dots$$

von Dreiecken, und es gilt die Abschätzung

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)dz\right|$$

Nun verwenden wir Satz 1.7: Da die Dreiecke $\Delta^{(i)}$ alle kompakt sind, existiert ein $z_0 \in \bigcap_{n\geq 0} \Delta^{(n)}$. Wegen $z_0 \in U$ und $f \in \mathcal{O}(U)$ ist f in z_0 komplex differentierbar, also gilt

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)(f'(z_0) + A(z)),$$

hierbei ist $A(z)$ eine in z_0 stetige Funktion, welche noch $A(z_0) = 0$ erfüllt. Betrachten wir $f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0)$, so ist dies eine integrable Funktion (denn sie ist in z linear), also haben wir für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\partial\Delta^{(n)}} (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0))\, dz = 0,$$

es gilt also

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)dz\right| &= \left|\int\limits_{\partial\Delta^{(n)}} (z - z_0)A(z)dz\right| \leq \int\limits_{\partial\Delta^{(n)}} |(z - z_0)A(z)|\, dz \\
&\leq L(\partial\Delta^{(n)}) \cdot \max_{z\in\partial\Delta^{(n)}} (|(z - z_0)| \cdot |A(z)|) \\
&\leq L(\partial\Delta^{(n)}) \cdot \max_{z\in\partial\Delta^{(n)}} \big(L(\partial\Delta^{(n)}) \cdot |A(z)|\big) \\
&= L(\partial\Delta^{(n)})^2 \cdot \max_{z\in\partial\Delta^{(n)}} (|A(z)|)
\end{aligned}$$

Aus der Geometrie der Dreieckskonstrution oben sieht man sofort, dass

$$L(\partial\Delta^{(n)}) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta^{(n-1)})$$

gilt, also insbesondere

$$L(\partial\Delta^{(n)}) = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta).$$

Damit bekommen wir insgesamt

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leq 4^n \left(\frac{1}{2^n} L(\partial\Delta)\right)^2 \cdot \max_{z\in\partial\Delta(n)} (|A(z)|) = L(\partial\Delta)^2 \cdot \max_{z\in\partial\Delta(n)} (|A(z)|)$$

Dies gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Andererseits ist $A(z_0) = \lim_{z\mapsto z_0} A(z) = 0$, also gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\max\limits_{z\in\partial\Delta(n)} (|A(z)|) < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt. Damit muss

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

sein. $\square$

Die folgende Konsequenz ist eine Verschärfung des Integralsatzes von Goursat, welche in den Anwendungen relevant ist.

Korollar 3.12. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $\Delta \subset U$ ein Dreieck und sei $z_0 \in \Delta$. Sei weiterhin $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph außerhalb von z_0, d.h., $f \in \mathcal{O}(U \backslash \{z_0\})$. Dann gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Beweis. Wir führen einen Beweis durch Fallunterscheidung. Zunächst sei angenommen, dass der Punkt z_0 ein Eckpunkt von Δ ist. Dann zerlegen wir Δ wie im Bild 3.5. Es seien dabei z_1 und z_1' so gewählt, dass die

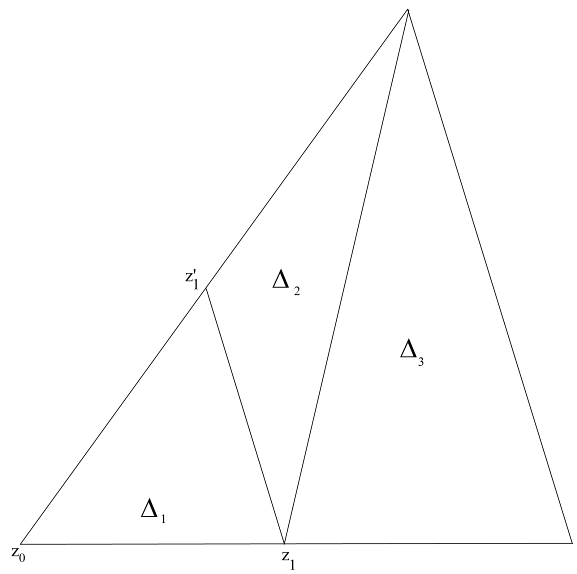

Abbildung 3.5: Zerlegung.

Gerade z_1z_1' parallel zur Gerade z_2z_3 ist. Da f in Umgebungen der Dreiecke Δ_2 und Δ_3 holomorph ist, gilt nach Satz 3.11, dass

$$\int_{\partial\Delta_2} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_3} f(z)dz = 0$$

ist. Damit folgt also

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz.$$

Dies beweist zunächst einmal, dass das Integral $\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz$ unabhängig von der Wahl des Punktes z_1 auf der Strecke z_0z_2 ist. Natürlich gilt wieder die Abschätzung

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz \right| \leq L(\partial\Delta_1) \cdot \max_{z\in\partial\Delta_1} |f(z)|$$

Da andererseits f bei z_0 stetig ist (und damit $|f(z)|$ in Δ, also auch in jedem Δ_1 beschränkt ist), haben wir

$$\lim_{z_1 \mapsto z_0} L(\partial\Delta_1) \cdot \max_{z\in\partial\Delta_1} |f(z)| = 0.$$

Also ist

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| = \lim_{z_1 \mapsto z_0} \left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| = \lim_{z_1 \mapsto z_0} \left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz\right| = 0.$$

Als nächsten Schritt betrachtet man den Fall, bei dem z_0 auf $\partial\Delta$ liegt, aber keine Ecke dieses Dreiecks ist. Dann betrachten wir eine Zerlegung von Δ wie im Bild 3.6 und erhalten

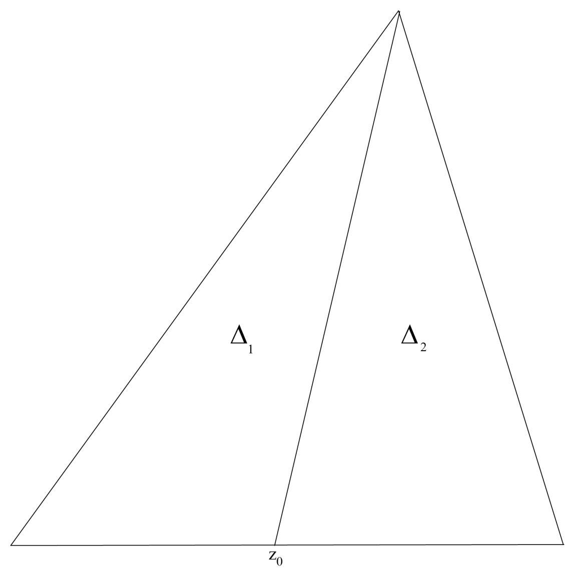

Abbildung 3.6: Zerlegung.

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz = 0$$

da wir für die beiden Integrale $\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz$ und $\int_{\partial\Delta_2} f(z)dz$ jeweils den ersten Fall, bei dem z_0 eine Ecke war, benutzen können. Schließlich bleibt noch der Fall $z_0 \in \Delta\backslash\partial\Delta$ zu betrachten, hier wählen wir eine Zerlegung wie in 3.7 und bekommen erneut

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz = 0$$

da wir diesmal den eben bewiesenen Fall, bei welchem z_0 auf dem Rand, aber nicht auf einer Ecke liegt, benutzen können. Damit ist das Korollar bewiesen. □

Wir schlußfolgern sofort, dass Funktionen, welche die Bedingungen des letzten Korollars erfüllen, integrabel sind.

Korollar 3.13. *Sei U ein Sterngebiet, und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Sei $z_0 \in U$ und es gelte $f \in \mathcal{O}(U\backslash\{z_0\})$. Dann ist f integrabel, d.h., f hat auf U eine Stammfunktion.*

Beweis. Man kombiniert einfach Korollar 3.12 mit dem Integrabilitätskriterium für Sterngebiete (Satz 3.10, 2.). □

Daraus erhalten wir sofort den Integralsatz von Cauchy.

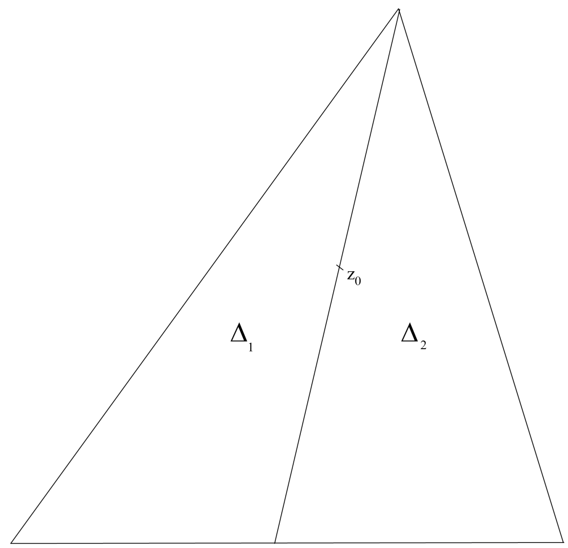

Abbildung 3.7: Zerlegung.

Satz 3.14. *Sei U ein Sterngebiet, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig mit $f \in \mathcal{O}(U \backslash \{z_0\})$. Sei $\gamma : [a, b] \to U$ ein geschlossener Integrationsweg, dann ist*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Beweis. Wegen des letzten Korollars hat f auf U eine Stammfunktion, und wegen Korollar 3.8, 2. ist dann $\int_\gamma f(z)dz = 0$. □

Der folgende Satz ist fundamental für die gesamte Funktionentheorie, weil er es erlaubt, Werte von holomorphen Funktionen durch Integrale zu bestimmen.

Satz 3.15 (Integralformel von Cauchy)**.** *Sei U ein Gebiet in $\mathbb{C}$, sei $f \in \mathcal{O}(U)$ und sei $c \in U$. Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $D_\varepsilon(c) = \overline{B_\varepsilon(c)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| \leq \varepsilon\} \subset U$ ist. Dann gilt für alle $z \in B_\varepsilon(c)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Hierbei bezeichne $\partial D_\varepsilon(c)$ den geschlossenen Integrationsweg

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 2\pi] & \longrightarrow & U \\ t & \mapsto & c + \varepsilon \cdot \exp(it). \end{array}$$

Speziell bekommen wir für $z = c$ die Formel

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + \varepsilon \exp(it))dt.$$

Beweis. Fixiere einen Punkt $z \in B_\varepsilon(c)$, und definiere

$$\begin{array}{rcl} g : U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \zeta & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{für } \zeta \neq z \\ f'(u) & \text{für } \zeta = z \end{cases} . \end{array}$$

Dann ist g auf U stetig (außerhalb von z ist dies klar, und bei z gilt es, weil f auf ganz U holomorph, also insbesondere bei z komplex differentierbar ist). Außerdem ist g natürlich auf $U \backslash \{z\}$ holomorph. Wir können also dden Integralsatz von Cauchy (Satz 3.14) auf g anwenden und bekommen

$$0 = \int\limits_{\partial D_\varepsilon(c)} g(\zeta) d\zeta = \int\limits_{\partial D_\varepsilon(c)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int\limits_{\partial D_\varepsilon(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \; - \; f(z) \cdot \int\limits_{\partial D_\varepsilon(c)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \tag{3.3}$$

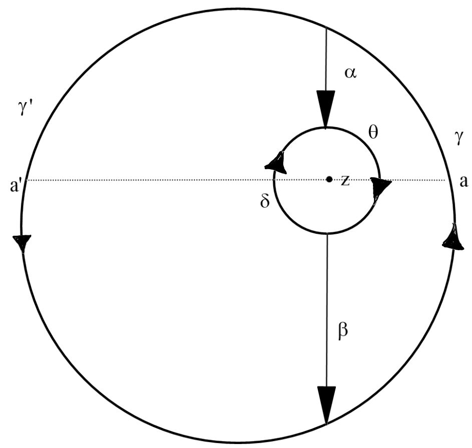

Abbildung 3.8: Verschiebung des Kreiszentrums

Wir müssen also nur noch beweisen, dass

$$\int_{\partial D_\varepsilon(c)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i \tag{3.4}$$

gilt. Dies ist klar, falls $z = c$ ist (siehe Formel (3.1)), sonst aber zunächst einmal nicht. Wir betrachten daher die Situation im Bild 3.8: Unser Integrationsweg $\partial D_\varepsilon(c)$ ist dort durch $\gamma + \gamma'$ gegeben, und $\theta + \delta$ sei gleich $\partial D_{\varepsilon'}(z)$ für ein $\varepsilon' < \varepsilon$. Sei weiterhin $\Gamma = \gamma + \alpha + \theta + \beta$ und $\Gamma' := \gamma' - \beta + \delta - \alpha$. Da die Gebiete $D_\varepsilon(c) \backslash [za]$ und $D_\varepsilon(c) \backslash [za']$ sternförmig sind und die Funktion $1/(\zeta - z)$ auf beiden Gebieten holomorph ist, folgt aus dem Integralsatz, dass

$$\int_{\Gamma'} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

ist. Damit bekommen wir

$$
\begin{aligned}
0 &= \int\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{\Gamma'} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\
&= \int\limits_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{\alpha} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{\theta} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{\beta} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{\gamma'} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int\limits_{\beta} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{\delta} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int\limits_{\alpha} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\
&= \int\limits_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{\theta} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{\gamma'} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{\delta} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\
&= \int_{\partial D_\varepsilon(c)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \underbrace{\int_{\theta+\delta} \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{=-2\pi i}
\end{aligned}
$$

Hierbei ergibt sich die Gleichheit $\int_{\theta+\delta} f(\zeta)d\zeta = -2\pi i$ aus Formel (3.1), man beachte, dass bei dem Integrationsweg $\theta + \delta$ der Punkt z in entgegengesetzter Richtung als in Formel (3.1) durchlaufen wird, daher das Minuszeichen.
Somit gilt

$$\int_{\partial D_\varepsilon(c)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$$

und damit liefert Gleichung (3.3), dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_\varepsilon(c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

ist. Die Integralformel von Cauchy ist damit bewiesen.
Für den Fall $z = c$ bekommen wir einfach durch Einsetzen des Integrationsweges $\varphi : t \mapsto c + \varepsilon \exp(it)$

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varphi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{f(c + \varepsilon \exp(it))}{\varepsilon \exp(it)} \varepsilon \cdot i \cdot \exp(it) dt = \frac{i}{2\pi i} \int\limits_{0}^{2\pi} f(c+\varepsilon \exp(it)) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(c+\varepsilon \exp(it))$$

$\square$

Wir sehen also, dass der Wert einer holomorphen Funktion an einer Stelle $c = 0$ der Mittelwert der Funktionswerte auf einer Kreislinie von einem beliebigen Radius um c ist.
Als nächstes wollen wir einige einfache, aber sehr wichtige Konsequenzen aus der Integralformel von Cauchy formulieren. Dazu brauchen wir zunächst einen Begriff.

Definition 3.16. *Sei U ein Gebiet, und $z_0 \in U$, sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sagen wir, dass f um z_0 in eine Potenzreihe entwickelbar ist, falls es eine Reihe*

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

gibt, welche in einer Umgebung von z_0 in U gegen f konvergiert.

Man beachte, dass eine bei z_0 in eine Potenzreihe entwickelbare Funktion gemäß Korollar 2.23 automatisch holomorph in einer Umgebung U von z_0 ist und dass die Konvergenz dieser Reihe auf U lokal gleichmäßig ist.
Nun haben wir den folgenden Satz.

Satz 3.17. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(U)$ eine holomorphe Funktion. Sei $z_0 \in U$, dann ist f um z_0 in eine Potenzreihe entwickelbar.*

Für den Beweis benötigen wir ein Kriterium zur Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung.

Lemma 3.18. *Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, und sei $(f_n) : Sp(\gamma) \to \mathbb{C}$ eine Folge von auf $Sp(\gamma)$ stetigen Funktionen, welche* gleichmäßig *gegen $f(z) : Sp(\gamma) \to \mathbb{C}$ konvergieren, dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

Beweis. Wir benutzen die Standardabschätzung für Kurvenintegrale (siehe Satz 3.5, 2.) und bekommen für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\int_\gamma f_n(z)dz - \int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_\gamma (f_n(z)dz - f(z))dz\right| \le \sup_{z\in \mathrm{Sp}(\gamma)} |f_n(z) - f(z)| \cdot L(\gamma).$$

Nach Voraussetzung konvergiert die Folge (f_n) auf $\mathrm{Sp}(\gamma)$ gleichmäßig gegen f, damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in \mathrm{Sp}(\gamma)} |f_n(z) - f(z)| = 0,$$

und damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_\gamma f_n(z)dz - \int_\gamma f(z)dz\right| = 0,$$

also $\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$. □

Beweis des Satzes. Sei $R > 0$ maximal, so dass die (abgeschlossene) Kreisscheibe $D_R(z_0)$ in U liegt. Sei $r < R$ fest gewählt, dann gilt nach der Integralformel von Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_r(z_0)} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

für alle $z \in B_r(z_0)$. Nun ist

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} \cdot \frac{1}{\zeta - z_0}$$

Natürlich gilt für $\zeta \in \partial D_r(z_0)$ und $z \in B_r(z_0)$, dass $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ ist, und damit können wir $\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$ als geometrische Reihe schreiben, d.h., es gilt

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n\ge 0} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n},$$

also

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n\ge 0} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

Wir bekommen also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} f(\zeta) \cdot \sum_{n\ge 0} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

Wenn wir nun z fixieren, und dann konvergiert $\sum_{n\ge 0} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$ gleichmäßig auf $\partial D_r(z_0)$. Natürlich ist f auf $\partial D_r(z_0)$ beschränkt, und damit ist die Folge der Partialsummen

$$F_k(\zeta) := f(\zeta) \cdot \sum_{n=0}^{k} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

auf $\partial D_r(z_0)$ gleichmäßig konvergent. Wir können also das letzte Lemma anwenden, also Integration und Grenzwertbildung (d.h., Summation) vertauschen. Es folgt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n.$$

Sei nun $a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$, dann konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für alle $z \in D_r(z_0)$ gegen f, und sogar gleichmäßig auf allen abgeschlossenen Kreisscheiben $D_{r'}(z_0)$ mit $r' < r$. Damit ist f um z_0 in eine Potenzreihe entwickelbar. □

Als Konsequenz erhalten wir die folgende wirklich schöne Aussage.

Korollar 3.19. *Sei $f \in \mathcal{O}(U)$, dann ist f an allen Punkten $z_0 \in U$ beliebig oft komplex differentierbar, und es gilt für die Ableitungen von f die (verallgemeinerte) Integralformel von Cauchy*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Beweis. Da die Funktion f in U holomorph ist, kann sie nach dem letzten Satz um jeden Punkt in eine Potenzreihe entwickelt werden. Diese ist aber nach Satz 2.22 beliebig oft bei z_0 komplex differentierbar, dies gilt dann auch für f.
Ist $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ in einer Umgebung von z_0, dann gilt nach Korollar 2.23, dass $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ ist, andererseits haben wir eben bewiesen, dass $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ gilt, also folgt:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

□

Im Spezialfall $n = 0$ erhalten wir damit wieder die Integralformel von Cauchy, also

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Wir sehen auch, dass man die allgemeine Integralformel für die n-te Ableitung aus der speziellen (für den Funktionswert $f(z_0)$) bekommen kann, indem man Ableitung und Integral vertauscht. Dies ist tatsächlich möglich, und läßt sich wie das obige Lemma 3.18 beweisen.
Wir können jetzt als Konsequenz des letzten Korollars (und damit letztlich der Integralformel von Cauchy) Kriterien angeben, unter denen eine gegebene Funktion holomorph ist. Hierzu benötigen wir zunächst noch einen zusätzlichen Begriff.

Definition-Lemma 3.20. *Sei U ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. f heißt* lokal integrabel*, falls für alle $z \in U$ eine offene Umgebung V von z in U existiert, so dass $f_{|V}$ integrabel ist, d.h., so dass $f_{|V}$ eine Stammfunktion besitzt.*
Eine auf U lokal integrable Funktion f ist dort holomorph.

Beweis. Holomorphie ist nach Definition eine lokale Eigenschaft: es reicht, zu zeigen, dass für alle Umgebungen V, auf denen f eine Stammfunktion F besitzt, $f_{|V} \in \mathcal{O}(V)$ gilt. Das ist aber klar, denn nach dem letzten Korollar ist F beliebig oft komplex differentierbar, und dies gilt dann natürlich auch auch für f. □

Jede integrable Funktion ist natürlich auch lokal integrabel. Andererseits hat z.B. die Funktion $1/z$ auf $U = \mathbb{C}^*$ keine Stammfunktion (denn sonst wäre $\int_{\partial D_r(0)} d\zeta/\zeta = 0$), aber für alle $z \in \mathbb{C}^*$ existiert lokal eine Stammfunktion, wegen des Integralsatzes von Goursat (Satz 3.11), angewandt auf $B_r(z)$ für kleines $r > 0$. Also ist $1/z \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$ nicht integrabel, aber lokal integrabel.
Nun können wir das versprochene Holomorphiekriterium formulieren.

Satz 3.21 (Satz von Morera)**.** *Sei U ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Falls für alle Dreiecke $\Delta \subset U$ gilt, dass*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

ist, dann ist f auf U holomorph.

Beweis. Wir hatten in Satz 3.10, 2. schon gesehen, dass für sternförmige Gebiete aus der Voraussetzung folgt, das f integrabel ist. Ist U nicht sterförmig, so kann man für alle $z \in U$ eine sternförmige Umgebung S von z mit $S \subset U$ finden, und für alle Dreiecke $\Delta \subset S$ gilt dann $\int_\Delta f(z)dz = 0$. Wir schliessen also, dass f unter den Voraussetzungen des Satzes lokal integrabel ist und damit nach dem letzten Lemma holomorph ist. □

Unter gewissen Voraussetzungen können wir mit einem ähnlichen Argument holomorphe Funktionen auf eventuelle „Ausnahmestellen" fortsetzen.

Korollar 3.22. *Sei U ein Gebiet, $z_0 \in U$ und sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Falls $f \in \mathcal{O}(U\backslash\{z_0\})$ ist, dann ist f sogar auf ganz U holomorph.*

Beweis. Wir können aus der Verschärfung des Integralsatzes von Goursat (also aus Korollar 3.13) schlußfolgern, dass f auf ganz U integrabel ist. Wie beim Satz von Morera folgt aus der Existenz einer Stammfunktion F auf U, dass diese dann an allen Punkten $z \in U$ beliebig oft komplex differentierbar ist, und dies gilt dann auch für ihre Ableitung f. Daher bekommen wir $f \in \mathcal{O}(U)$. □

Wir sehen aus diesem letzten Ergebnis, dass die Verschärfung des Goursatschen Integralsatzes eigentlich gar keine Verschärfung ist, denn eine stetige Funktion, welche außerhalb eines Punktes holomorph ist, ist automatisch überall holomorph und besitzt daher schon wegen des ursprünglichen Satzes von Goursat eine Stammfunktion. Aber zum Beweis des letzten Korollars haben wir Korollar 3.19 und damit die Cauchysche Integralformel benutzt, und diese wiederum benötigt die Verschärfung des Satzes von Goursat.
Die folgende Aussage zeigt, dass man die Voraussetzungen des letzten Korollars auch leicht abschwächen kann, die Stetigkeit der außerhalb eines Punktes holomorphen Funktion wird gar nicht benötigt.

Korollar 3.23 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.** *Sei U ein Gebiet, $z_0 \in U$ und $f \in \mathcal{O}(U\backslash\{z_0\})$. Falls es ein $\varepsilon > 0$ mit $D_r(z_0) \subset U$ und so, dass die Funktion f auf $B_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\}$ beschränkt ist, gibt, dann läßt sich f holomorph auf U fortsetzen, d.h., es existiert $\widehat{f} \in \mathcal{O}(U)$, so dass*

$$\widehat{f}_{|U\backslash\{z_0\}} = f$$

gilt.

Der Satz trägt seinen Namen daher, weil man seine Aussage so interpretieren kann, dass man die Fehlstelle oder Lücke z_0 der Funktion f (also den Punkt, an dem sie nicht definiert ist), „aufheben" kann.

Beweis. Wir definieren eine Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0) \cdot f(z) & \text{für } z \in U\backslash\{z_0\} \\ 0 & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

Auf $U\backslash\{z_0\}$ ist g natürlich holomorph (da dort $g(z) = (z - z_0)f(z)$ gilt und $f \in \mathcal{O}(U\backslash\{z_0\})$ ist). Da nach Voraussetzung f auf $D_r(z_0)\backslash\{z_0\}$ beschränkt ist, gilt $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$, d.h., g ist bei z_0 stetig. Nach dem letzten Korollar folgt also $g \in \mathcal{O}(U)$, insbesondere ist g bei z_0 komplex differentierbar. Es existiert also eine Funktion $a : U \to \mathbb{C}$, welche bei z_0 stetig ist, und so dass

$$g(z) = g(z_0) + (z - z_0) \cdot a(z)$$

gilt. Auf $U \backslash \{z_0\}$ folgt aus dieser Gleichung durch Einsetzen von $(z - z_0)f(z)$ für $g(z)$, dass

$$(z - z_0)f(z) = (z_0 - z_0)f(z_0) + (z - z_0)a(z),$$

also $f(z) = a(z)$ gilt. Also ist $a(z) = f(z)$ auf $U \backslash \{z_0\}$, und damit ist $a \in \mathcal{O}(U \backslash \{z_0\})$. Außerdem ist aber a in z_0 stetig, und damit gilt können wir erneut das letzte Korollar anwenden, und erhalten $a \in \mathcal{O}(U)$. Damit ist $\widehat{f}(z) := a(z)$ die gesuchte holomorphe Fortsetzung von f auf ganz U. □

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch einmal zusammenfassen, welche verschiedenen Charakterisierungen von holomorphen Funktionen wir bisher kennengelernt haben.

Satz 3.24 (Äquivalenzsatz)**.** *Sei U ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

1. *$f \in \mathcal{O}(U)$, d.h., f ist in U holomorph.*
2. *Für alle Dreiecke $\Delta \subset U$ gilt*
$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$
3. *Es gilt die Integralformel von Cauchy für f, d.h., für alle $c \in U$ und alle $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(c) \subset U$ ist*
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$
4. *f ist für alle $z_0 \in U$ bei z_0 in eine Potenzreihe entwickelbar.*
5. *f ist an allen Punkten $z_0 \in U$ beliebig oft komplex differentierbar.*
6. *f ist lokal integrabel*
7. *$f_{\mathbb{R}} : U \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (\Re(f)(x + iy), \Im(f)(x + iy)) =: (u, v)$ ist in allen Punkten $z \in U$ stetig (reell) differentierbar, und es gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen*
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Beweis. Wir haben bis jetzt die Implikationen 1. $\Longrightarrow$ 2. (Satz 3.11), 1. $\Longrightarrow$ 3. (Korollar 3.12 und Satz 3.15), 3. $\Longrightarrow$ 4. (Beweis von Satz 3.17), 4. $\Longrightarrow$ 5. (Beweis von Korollar 3.19), 6. $\Longrightarrow$ 1. (Lemma 3.20) sowie 2. $\Longrightarrow$ 6. (Satz 3.21) gezeigt. Die Implikation 5. $\Longrightarrow$ 1. ist offensichtlich. Außerdem haben wir bereits in Satz 2.11 die Äquivalenz 1. $\Longleftrightarrow$ 7. gezeigt, und damit ist der Äquivalenzsatz bewiesen. □

3.4 Der Satz von Liouville und der Fundamentalsatz der Algebra

Wir wollen in diesem Abschnitt eine Konsequenz der Integralformel von Cauchy herleiten, welche eine ganz zentrale Eigenschaft des Körpers der komplexen Zahlen betrifft, nämlich die Tatsache, dass ein Polynom in $\mathbb{C}$ immer eine Nullstelle hat. Dies ist der Fundamentalsatz der Algebra, welcher sich allerdings nicht vollständig algebraisch beweisen läßt, da er analytische Eigenschaften der komplexen Zahlen verwendet. Der hier gegebene Beweis ist sehr kurz, benutzt aber die gesamte bisher aufgebaute Theorie. Im nächsten Semester in der Algebra-Vorlesung werde ich einen weiteren Beweis geben, welcher nur ganz elementare analytische Eigenschaften der reellen Zahlen verwendet, dafür aber mehr algebraische Hilfsmittel braucht.
Wir beginnen mit einer Abschätzung, welche sich direkt aus der Integralformel von Cauchy ergibt.

Lemma 3.25. *Sei U ein Gebiet, und $f \in \mathcal{O}(U)$, sei $z_0 \in U$ und sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Potenzreihenentwicklung von f auf $B_r(z_0)$, mit $r > 0$. Dann gilt für alle $n \geq 0$, dass

$$|a_n| \leq \frac{\sup_{\zeta \in \partial D_r(z_0)} |f(\zeta)|}{r^n}$$

ist.

Beweis. Aus der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel folgt, dass

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\right| \left| \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right|$$

gilt. Die Standardabschätzung liefert, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in \partial D_r(z_0)} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} \cdot L(\partial D_r(z_0)) = \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in \partial D_r(z_0)} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} \cdot 2\pi r \\ &= \frac{1}{2\pi r^{n+1}} \sup_{z \in \partial D_r(z_0)} |f(z)| \cdot 2\pi r = \frac{\sup_{z \in \partial D_r(z_0)} |f(z)|}{r^n} \end{aligned}$$

ist. □

Wesentlich für den Fundamentalsatz der Algebra sind Funktionen, welche in ganz $\mathbb{C}$ holomorph sind. Diese haben einen eigenen Namen.

Satz 3.26. *Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Dann heißt f eine* ganze *Funktion.*

Nun kommen wir zum Hauptergebnis dieses Abschnitts.

Satz 3.27. *Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eine ganze Funktion. Angenommen, es gebe ein $n \in \mathbb{N}_0$, sowie Konstanten $M, r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass*

$$|f(z)| < M \cdot |z|^n$$

für alle $z \in \mathbb{C} \backslash B_r(0)$ (d.h., für alle z mit $|z| \geq r$) gilt. Dann ist f ein Polynom mit $\deg(f) \leq n$.

Beweis. Sei $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ die Potenzreihenentwicklung von f um $0 \in \mathbb{C}$. Nach dem letzten Lemma wissen wir, dass dann für alle $m \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung

$$|a_m| \leq \frac{\sup_{\zeta \in \partial D_r(0)} |f(\zeta)|}{r^m}$$

gilt. Jetzt ist nach Voraussetzung $\sup_{\zeta \in \partial D_r(0)} |f(\zeta)| = \max_{\zeta \in \partial D_r(0)} |f(\zeta)| \leq M r^n$, da $|f(z)| \leq M|z|^n$ für alle $|z| \geq r$ gilt. Also bekommen wir

$$|a_m| \leq M r^{n-m}$$

Falls $m > n$ ist, folgt dann $|a_m| = \lim_{r \to \infty} |a_m| = \lim_{r \to \infty} M r^{n-m} = 0$, also ist

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m,$$

d.h., f ist ein Polynom vom Grad n. □

Insbesondere der Fall $n = 0$ des obigen Satzes ist wichtig, daher führen wir ihn hier noch einmal extra aus.

Korollar 3.28 (Satz von Liouville). *Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eine ganze Funktion. Angenommen, f sei beschränkt, d.h., es existiert $C \in \mathbb{R}$, so dass $|f(z)| < C$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Dann ist f konstant.*

Als Konsequenz bekommen wir nun den schon mehrfach erwähnten Satz über Nullstellen von Polynomen.

Satz 3.29 (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom. Dann gilt:*

1. *Falls $\deg(p) > 0$ gilt, falls also p nicht konstant ist, dann hat p eine Nullstelle in $\mathbb{C}$, d.h., es gibt ein $z \in \mathbb{C}$ mit $p(z) = 0$.*

2. *Sei $\deg(p) = n$, dann gibt es komplexe Zahlen $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (die Nullstellen von p) mit*

$$p(z) = c \cdot (z - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n).$$

Beweis.

1. Sei $n := \deg(p) > 0$, dann ist

$$p(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0$$

mit $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$. Angenommen, p hätte keine Nullstelle in $\mathbb{C}$, d.h., für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $p(z) \neq 0$. Dann ist die Funktion $1/p(z)$ in ganz $\mathbb{C}$ definiert und holomorph, also eine ganze Funktion. Es gilt jetzt

$$p(z) = z^n \cdot (a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n})$$

und damit ist

$$\lim_{z \to \infty} p(z) = \infty.$$

Dies kann man folgendermaßen umformulieren: Es existiert $r > 0$, so dass $|p(z)| > 1$ für alle $|z| \geq r$ ist. Dann ist aber

$$\frac{1}{|p(z)|} \leq \max\left(1, \sup_{z \in D_r(0)} \frac{1}{|p(z)|}\right).$$

Da $D_r(0)$ kompakt ist, nimmt $|p|$ dort sein Maximum an, d.h., die Funktion $1/p$ ist beschränkt. Also ist sie nach dem Satz von Liouville konstant, aber dann ist auch p selbst konstant. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme $\deg(p) > 0$.

2. Dies ist eine einfache Konsequenz des ersten Teils: Ist $\deg(p) = 0$, dann ist $p = c$ ein konstantes Polynom, und die Aussage ist richtig. Ist $\deg(p) > 0$, dann existiert nach 1. eine Nullstelle $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, und mit Polynomdivision folgt, dass es ein Polynom $g \in \mathbb{C}[z]$ mit $p(z) = (z - \lambda_1) \cdot g(z)$ gibt. Natürlich ist $\deg(g) = \deg(p) - 1 < \deg(p)$, und dann folgt die Aussage durch vollständige Induktion (indem man Teil 1. einfach auf g anwendet).

□

Kapitel 4

Residuen

In diesem Abschnitt wollen wir noch genauer auf Funktionen eingehen, welche holomorph außerhalb gewisser Mengen, z.B. einer endlichen Anzahl von Punkten sind. Residuen sind Integrale solcher Funktionen über einen Weg, der die Außnahmestellen umläuft. Eine Variante der Integralformel von Cauchy kann dann dazu benutzt werden, reelle Integrale auszurechnen, indem man den Integrationsweg ins Komplexe fortsetzt.

4.1 Isolierte Singularitäten holomorpher Funktionen

Wir wollen zunächst einige Dinge über Funktionen, welche außerhalb eines Punktes holomorph sind, zusammentragen.

Definition 4.1. *Sei U ein Gebiet, $z_0 \in U$ und $f \in \mathcal{O}(U \backslash \{z_0\})$. Dann sagt man, dass f in z_0 eine isolierte Singularität hat.*

Auf den ersten Blick mag diese Definition verwunderlich wirken: Ist $f \in \mathcal{O}(U)$, dann hat es per Definition an allen Punkten von U eine isolierte Singularität. Man muss also offensichtlich den Fall, in welchem eine gegebene holomorphe Funktion auf $U \backslash \{z_0\}$ auf ganz U holomorph fortsetzbar ist unterscheiden von dem Fall, bei dem das nicht so ist. Dazu führen wir die folgenden Bezeichnungen ein.

Definition 4.2. *Seien U, z_0 und f wie eben. Dann heißt der Punkt z_0*

1. *eine* hebbare *Singularität von f, falls es ein $\widehat{f} \in \mathcal{O}(U)$ mit $\widehat{f}_{|U \backslash \{z_0\}} = f$ gibt,*
2. *ein* Pol *von f, falls er nicht hebbar ist, es aber ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Funktion $(z - z_0)^k \cdot f(z)$ bei z_0 eine hebbare Singularität hat (man nennt dann das kleinste k mit dieser Eigenschaft die* Ordnung *von f bei z_0 und schreibt* $\mathrm{ord}_{z_0}(f) := -k$*),*
3. *eine* wesentliche Singularität *von f, wenn er weder hebbar noch ein Pol ist.*

Klar ist, dass die holomorphe Fortsetzung einer Funktion mit hebbarer Singularität eindeutig bestimmt ist, denn gäbe es zwei Fortsetzungen $\widehat{f_1}$ und $\widehat{f_2}$ von f, dann wäre $\widehat{f_1} - \widehat{f_2}$ eine auf U holomorphe Funktion, welche nur am Punkt z_0 einen von Null verschiedenen Wert annimmt, und dies ist ein Widerspruch (denn dann wäre diese Funktion nicht stetig). Daher bezeichnen wir für $f \in \mathcal{O}(U \backslash \{z_0\})$ mit hebbarer Singularität bei z_0 diese holomorphe Fortsetzung immer mit $\widehat{f}$.
Zur Illustration betrachten wir zunächst einige Beispiele.

1. Die Funktionen
$$\exp(z)_{|\mathbb{C}^*} \qquad \text{und} \qquad \frac{z^k}{z^l} \;\; \text{für } k > l \qquad \text{und} \qquad \frac{\sin(z)}{z}$$

haben alle hebbare Singularitäten bei $z = 0$. Im letzten Fall sieht man dies an der Potenzreihenentwicklung, es ist $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n z^{2n+1} = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n z^{2n}$, also ist

$$\frac{\sin(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n z^{2n}$$

bei $z = 0$ definiert, außerhalb von 0 ohnehin holomorph, und damit auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

2. Die Beispiele

$$\frac{z^l}{z^k} \quad \text{für } k > l \qquad \frac{\cos(z)}{z} \qquad \frac{1}{\sin(z)}$$

haben Pole bei $z = 0$ und zwar sind die Ordnungen

$$\operatorname{ord}_0\left(\frac{z^l}{z^k}\right) = l - k \qquad \text{und} \qquad \operatorname{ord}_0\left(\frac{\cos(z)}{z}\right) = -1 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{ord}_0\left(\frac{1}{\sin(z)}\right) = -1$$

im letzten Fall folgt dies dadurch, dass, wie wir oben gesehen haben, $\frac{\sin(z)}{z}$ bei 0 holomorph und ungleich Null ist, also ist auch $\frac{z}{\sin(z)}$ holomorph, und damit ist die Ordnung des Pols von $\frac{1}{\sin(z)}$ gleich 1.

3. Die Funktionen

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{und} \qquad \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

haben bei 0 wesentliche Singularitäten: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{z\to 0} z^k \cdot \exp(1/z) = \lim_{w\to\infty} \frac{\exp(w)}{w^k} = \infty,$$

wie man leicht an der Potenzreihenentwicklung $\exp(z) = \sum_{n\geq 0} 1/n! \cdot z^n$ sieht. Analog argumentiert man für $\sin(1/z)$.

Wir wollen im Folgenden Pole und wesentliche Singularitäten charakterisieren. Wir beginnen mit dem einfacheren Fall der Pole. Vorher wollen wir noch den Begriff der Ordnung eines Pols verallgemeinern: Sei $f \in \mathcal{O}(U)$, $z_0 \in U$. Falls es eine auf U holomorphe Funktion g gibt, so dass $f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ und $g(z_0) \neq 0$ ist, dann sagen wir, dass f bei z_0 eine Nullstelle der Ordnung k hat, und wir schreiben $\operatorname{ord}_{z_0}(f) = k$. Es ist also z_0 eine Nullstelle von f (d.h., es gilt $f(z_0) = 0$), falls $\operatorname{ord}_{z_0}(f) > 0$, und falls $\operatorname{ord}_{z_0}(f) < 0$ ist, dann hat f bei z_0 einen Pol (und dann gilt natürlich nur noch $f \in \mathcal{O}(U\backslash\{z_0\})$ und nicht mehr $f \in \mathcal{O}(U)$).

Satz 4.3. *Sei U ein Gebiet, und $f : U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

1. *f hat bei z_0 einen Pol der Ordnung k.*
2. *Es gibt $g \in \mathcal{O}(U)$ mit $g(z_0) \neq 0$ und*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}.$$

3. *Es gibt eine Umgebung $V \subset U$ von z_0, so dass $1/f \in \mathcal{O}(V\backslash\{z_0\})$ gilt, derart, dass $1/f$ eine hebbare Singularität bei z_0 hat. Die Funktion $\widehat{1/f} \in \mathcal{O}(V)$ hat bei z_0 eine Nullstelle der Ordnung k.*
4. *Es gibt eine Umgebung $\widetilde{V} \subset U$ von z_0 und $c, C > 0$ so dass*

$$\frac{c}{|z - z_0|^k} \leq |f(z)| \leq \frac{C}{|z - z_0|^k}$$

für alle $z \in \widetilde{V}$ gilt.

Beweis. **1.** $\Longrightarrow$ **2.** Dies folgt direkt aus der Definition: Hat f bei z_0 einen Pol der Ordnung k, dann ist also $g(z) := (z-z_0)^k \cdot f(z)$ auf U holomorph, so dass wir $f(z) = g(z)/(z-z_0)^k$ bekommen. Angenommen, es würde $g(z_0) = 0$ gelten, dann folgt aus der Potenzreichenentwicklung von g bei z_0, dass $g(z) = (z-z_0) \cdot \widetilde{g}(z)$ mit einer auf U holomorphen Funktion $\widetilde{g}$ ist, d.h., es wäre schon $(z-z_0)^{k-1} \cdot f(z)$ holomorph, im Widerspruch zur Minimalitätsannahme der Ordnung des Pols von f bei z_0.

2. $\Longrightarrow$ **3.** Da $g(z_0) \neq 0$ ist, gibt es eine Umgebung V von z_0 in U, so dass $g(z) \neq 0$ für alle $z \in V$ gilt. Dann gilt $1/g \in \mathcal{O}(V)$ und damit ist zunächst

$$\frac{1}{f}(z) = \frac{(z-z_0)^k}{g(z)} \in \mathcal{O}(U \backslash \{z_0\})$$

aber sogar $1/f \in \mathcal{O}(U)$ (z.B. kann man Korollar 3.22 benutzen: wegen $1/g(z_0) \neq 0$ ist $lim_{z \to z_0}(z-z_0)^k/g(z) = 0$ und damit ist $(z-z_0)^k/g(z)$ bei z_0 stetig). Natürlich folgt aus $g(z_0) \neq 0$ und $1/f = (z-z_0)^k/g(z)$, dass $1/f$ bei z_0 eine Nullstelle der Ordnung k hat.

3. $\Longrightarrow$ **4.** Angenommen, $1/f$ sei auf $V \backslash \{z_0\}$ holomorph mit hebbarer Singularität bei z_0, wobei V eine Umgebung von z_0 in U ist. Wie vorher bezeichnen wir mit $\widehat{1/f}$ die Fortsetzung nach z_0 und wir nehmen weiterhin an, dass $\widehat{1/f}$ bei z_0 eine Nullstelle der Ordnung k habe. Dann ist

$$\widehat{\left(\frac{1}{f}\right)}(z) = (z-z_0)^k \cdot \widetilde{h}(z)$$

mit $\widetilde{h} \in \mathcal{O}(V)$ und $\widetilde{h}(z_0) \neq 0$. Daher gibt es eine offene Umgebung $\widetilde{V} \subset V$, auf der $\widetilde{h}$ nicht verschwindet, und dann existieren Konstanten $l, L > 0$, so dass

$$l \leq |\widetilde{h}(z)| \leq L.$$

Wegen $\widetilde{h} = 1/((z-z_0)^k \cdot f)$ ist also

$$|z-z_0|^k \cdot l \leq \frac{1}{|f(z)|} \leq |z-z_0|^k \cdot L.$$

Setzen wir $c := 1/l$ und $C := 1/L$, dann folgt

$$\frac{c}{|z-z_0|^k} \leq |(f(z)| \leq \frac{C}{|z-z_0|^k}.$$

4. $\Longrightarrow$ **1.** Nach Voraussetzung gilt $|(z-z_0)^k \cdot f(z)| \leq C$ in einer Umgebung $\widetilde{V}$ von z_0, d.h., diese Funktion ist dort beschränkt. Außerdem ist f als in $\mathcal{O}(U \backslash \{z_0\})$ holomorph vorausgesetzt, damit können wir den Riemannschen Hebbarkeitssatz (Korollar 3.23) anwenden, und bekommen, dass $(z-z_0)^k \cdot f(z)$ holomorph in U ist. Dann hat also f nach Definition bei z_0 einen Pol. Um zu zeigen, dass die Ordnung dieses Pols genau k ist, müssen wir beweisen, dass $(z-z_0)^{k-1} \cdot f(z)$ nicht holomorph nach z_0 fortsetzbar ist. Es gilt aber

$$\frac{c}{|z-z_0|} \leq |(z-z_0)^{k-1} \cdot f(z)|,$$

und daher ist $\lim_{z \to z_0} \left((z-z_0)^{k-1} \cdot f(z)\right) = \infty$, also ist $(z-z_0)^{k-1} \cdot f(z)$ bei z_0 sicherlich nicht komplex differentierbar.

$\square$

Zur Beschreibung wesentliche Singularitäten holomorpher Funktionen erinnern wir daran, dass falls X ein metrischer Raumes und $Y \subset X$ eine Teilmenge ist, ein Punkt $x \in X$ ein Häufungspunkt von Y in X heißt, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt, dass $(B_\varepsilon(x) \cap Y) \cap (X \backslash \{x\}) \neq \emptyset$ ist. Hat die Menge Y keinen Häufungspunkt (in X), dann heißt sie diskret, dies bedeutet, dass Y abgeschlossen in X ist und dass für alle $y \in Y$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(y) \cap Y = \{y\}$ ist.

Satz 4.4. *Sei U ein Gebiet, und $f : U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

1. *(Satz von Casorati-Weierstraß): Hat f bei z_0 eine wesentliche Singularität, dann liegt die Menge $f(U\backslash\{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$, d.h., jede komplexe Zahl ist Häfungspunkt von $f(U\backslash\{z_0\})$.*

2. *(Großer Satz von Picard): Die Menge $f(U\backslash\{z_0\})$ ist entweder gleich $\mathbb{C}$, oder gleich $\mathbb{C}\backslash\{y\}$ für ein $y \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Wir beweisen hier nur den Satz von Casorati-Weierstraß. Sei $w_0 \in \mathbb{C}$. Angenommen, w_0 wäre kein Häufungswert der Bildmenge $f(U\backslash\{z_0\})$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass $|w_0 - f(z)| > \varepsilon$ für alle $z \in U\backslash\{z_0\}$ gilt (insbesondere ist natürlich $w_0 \notin f(U\backslash\{z_0\})$). Dann ist aber

$$\frac{1}{|w_0 - f(z)|} < \frac{1}{\varepsilon}$$

auf $U\backslash\{z_0\}$. Wegen $f(z) \neq w_0$ für alle $z \in U\backslash\{z_0\}$ ist natürlich die Funktion $g : z \mapsto 1/(w_0 - f(z))$ auf $U\backslash\{z_0\}$ holomorph. Da sie wegen der Abschätzung beschränkt ist, können wir wieder aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz (Korollar 3.23) folgern, dass g bei z_0 eine hebbare Singularität hat, sei $k := \mathrm{ord}_{z_0}(g)$, dann ist $k \in \mathbb{N}_0$. Nach der Implikation 3. $\Longrightarrow$ 1. aus dem Satz 4.3 folgt dann, dass $1/g$ bei z_0 einen Pol der Ordnung k hat, im Falle $k = 0$ hat dann $1/g$ eine hebbare Singularität bei z_0. Es ist nun aber $(1/g)(z) = f(z) + w_0$, also hat dann auch f bei z_0 einen Pol oder eine hebbare Singularität, im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass f bei z_0 eine wesentliche Singularität besitzt.
Der große Satz von Picard ist wesentlich schwieriger zu zeigen. Als Beispiele geben wir nur die folgenden zwei Funktionen an:

$$f(z) = \exp(1/z) \qquad \text{und} \qquad g(z) = \sin(1/z).$$

Dann ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ surjektiv, wohingegen $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ surjektiv ist (dies kann man als Übungsaufgabe nachrechnen). $\square$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer schönen Eigenschaft von Funktionen, welche nur Polstellen haben.

Definition 4.5. *Sei U ein Gebiet, $T \subset U$ eine diskrete Teilmenge und $f : U\backslash T \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt f eine meromorphe Funktion auf U, falls f an jedem Punkt von T einen Pol oder eine hebbare Singularität hat.*

Zunächst müssen wir klären, welche Arten von Polmengen T überhaupt auftreten können.

Lemma 4.6. *Sei U ein Gebiet und $f \not\equiv 0$ eine meromorphe Funktion auf U mit Polstellenmenge $P(f)$. Sei weiterhin $N(f) \subset U\backslash P(f)$ die Nullstellenmenge von f. Dann haben $P(f)$ und $N(f)$ keine Häufungspunkte in U.*

Der Beweis des Lemmas folgt aus dem folgenden Satz, der auch für sich allein genommen von Interesse ist, denn er sagt, dass eine holomorphe Funktion eindeutig durch ihre Werte auf einer Menge mit Häufungspunkten bestimmt ist.

Satz 4.7 (Identitätssatz)**.** 1. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(U)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

   (a) $f(z) = 0$ für alle $z \in U$,

   (b) Es gibt ein $z_0 \in U$ mit $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = \infty$, d.h., alle Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von f bei z_0 sind gleich Null,

   (c) Die Menge $N = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$ hat eine Häufungspunkt in U.

2. *Seien $f, g \in \mathcal{O}(U)$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

   (a) $f(z) = g(z)$ für alle $z \in U$,

   (b) Es gibt ein $z_0 \in U$ mit $\left(\frac{\partial^n f}{\partial z^n}\right)(z_0) = \left(\frac{\partial^n g}{\partial z^n}\right)(z_0) =$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,

(c) *Die Menge* $N = \{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$ *hat eine Häufungspunkt in* U.

Beweis. Natürlich folgt die zweite Aussage aus der ersten, indem man die Funktion $f - g$ auf U betrachtet. Wir müssen also nur die erste Aussage beweisen. Offensichtlich folgt (c) aus (a). Wir zeigen zunächst die Implikation (c) $\Rightarrow$ (b). Sei $z_0 \in U$ ein Häufungspunkt von N, und wähle eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $z_k \in N$ und $\lim_{k\to\infty} z_k = z_0$. Wegen der Stetigkeit von f gilt $f(z_0) = \lim_{k\to\infty} f(z_k) = 0$. Wir wollen jetzt zeigen, dass sogar $\operatorname{ord}_{z_0}(f) = \infty$ gilt. Sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Potenzreihenentwicklunug von f bei z_0. Angenommen, wir hätten $\operatorname{ord}_{z_0}(f) < \infty$, dann sei

$$r := \min_{n\in\mathbb{N}} (a_n \neq 0).$$

Wegen $f(z_k) = 0$ ist dann für alle k

$$0 = \sum_{n=r}^{\infty} a_n (z_k - z_0)^n = (z_k - z_0)^r \cdot (a_r + g(z_k))$$

wobei $g(z) := (z - z_0) \cdot \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-r-1}$ ist. Division durch $(z_k - z_0)^r$ liefert $a_r = -g(z_k)$, und wegen der Stetigkeit von g ist $\lim_{k\to\infty} g(z_k) = g(z_0) = 0$. Damit ist $a_r = 0$, im Widerspruch zur Minimalität von r. Nun beweisen wir (b) $\Rightarrow$ (a). Sei $z' \in U$ mit $\operatorname{ord}_{z'}(f) = \infty$. Dann setzten wir

$$M := \{c \in U \mid (\partial^n f / \partial z^n)(c) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}_0\}$$

Dann ist klar, dass M offen in U ist: sei $z_0 \in M$ und sei $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)$ die Potenzreihenentwicklung von f bei z_0, dann ist wegen Korollar 2.23 $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist f in einer Umgebung $U' \subset U$ von z_0 identisch Null, d.h., wir haben $U' \subset M$. Andererseits ist aber auch $U \backslash M$ offen, denn für $z_0 \in U \backslash M$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $(\partial^k f/\partial z^k)(z_0) \neq 0$ gilt. Nun ist aber die Funktion $(\partial^k f/\partial z^k)(z)$ stetig, und damit verschwindet $(\partial^k f/\partial z^k)(z)$ in einer Umgebung von z_0 ebenfalls nicht, diese Umgebung ist also in $U \backslash M$ enthalten. Offensichtlich ist $z' \in M$, d.h. $M \neq \emptyset$. Da U ein Gebiet, also zusammenhängend ist, muss also $M = U$ gelten, und dann ist insbesondere $f \equiv 0$ auf U. □

Beweis von Lemma 4.6. Ist $z_0 \in U$ ein Pol, so gibt es eine Umgebung $z_0 \in U' \subset U$, so dass $f : U' \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Also hat $P(f)$ keine Häufungspunkte in U. Betrachte die Einschränkung $f_{|U\backslash P(f)} \in \mathcal{O}(U \backslash P(f))$. Man prüft leicht (Übung), dass die Menge $U \backslash P(f)$ auch ein Gebiet ist (verwende: $P(f)$ ist diskret), und dann hat nach dem Identitätssatz $N(f)$ keine Häufungspunkte in $U \backslash P(f)$. Wegen der Stetigkeit von f kann sich die Menge $N(f)$ aber nicht gegen einen Punkt aus $P(f)$ häufen, also hat $N(f)$ keine Häufungspunkte in U. □

Wir sehen also, dass die Menge der Pol- bzw. Nullstellen einer meromorphen Funktion eine in U diskrete Menge ist. Sind f und g zwei meromorphe Funktionen, dann gilt für alle $z_0 \in U$, dass

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^k \cdot \widetilde{f}(z) \\ g(z) &= (z - z_0)^l \cdot \widetilde{g}(z) \end{aligned}$$

in einer Umgebung von z_0 ist, mit $\operatorname{ord}_{z_0}(\widetilde{f}) = \operatorname{ord}_{z_0}(\widetilde{f}) = 0$ und $k, l \in \mathbb{Z}$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(z) &= (z - z_0)^{k+l} (\widetilde{f} \cdot \widetilde{g})(z) \\ (f/g)(z) &= (z - z_0)^{k-l} (\widetilde{f}/\widetilde{g})(z) \\ (f + g)(z) &= (z - z_0)^{\min(k,l)} (f' + g')(z) \end{aligned} \tag{4.1}$$

gilt, wobei $\operatorname{ord}_{z_0}(f'), \operatorname{ord}_{z_0}(g') \geq 0$

Schließlich können wir die algebraische Struktur der Menge der meromorphen Funktionen klären. Es sei daran erinnert, dass wir für eine Funktion f mit hebbaren Singularitäten mit $\widehat{f}$ die eindeutig bestimmte holomorphe Fortsetzung bezeichnen (siehe Definition 4.2).

Satz 4.8. *Sei U ein Gebiet. Sei*

$$\mathcal{M}(U) := \{(f, D) \mid f \in \mathcal{O}(U \backslash D) \quad f \text{ hat Pole an allen Punkten } z \in D\}$$

die Menge der auf U meromorphen Funktionen. Wir definierne Addition, Multiplikation und Inversion von Funktionen aus $\mathcal{M}(U)$ durch

$$\begin{array}{rcccl} + & : & f, g & \longmapsto & \widehat{(f+g)} \\ \\ \cdot & : & f, g & \longmapsto & \widehat{(f \cdot g)} \\ \\ (\,)^{-1} & : & f & \longmapsto & \widehat{(\frac{1}{f})} \end{array}$$

Dann ist $(\mathcal{M}(U), +, \cdot)$ ein Körper, wobei das Inverse bezüglich der Multiplikation durch die Inversion gegeben ist. Weiterhin gilt für die Ordnungsfunktion

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ord}_{z_0} : \mathcal{M}(U) \backslash \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ f & \longmapsto & \mathrm{ord}_{z_0}(f) \end{array}$$

dass

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ord}_{z_0}(f \cdot g) & = & \mathrm{ord}_{z_0}(f) + \mathrm{ord}_{z_0}(g) \\ \mathrm{ord}_{z_0}(f/g) & = & \mathrm{ord}_{z_0}(f) - \mathrm{ord}_{z_0}(g) \\ \mathrm{ord}_{z_0}(f+g) & \geq & \min\left(\mathrm{ord}_{z_0}(f), \mathrm{ord}_{z_0}(g)\right). \end{array}$$

Der Beweis ist eine einfache Übung (Nachrechnen der Körperaxiome), für die letzte Aussage benutze man Satz 4.3, 2.

4.2 Laurentreihen und holomorphe Funktionen in Kreisringen

Als Vorbereitung auf den Residuensatz (und in Verallgemeinerung der Untersuchungen über isoierte Singularitäten) wollen wir hier Funktionen betrachten, welche nicht auf einer offenen Kreisscheibe $B_r(z_0)$, sondern nur auf einem Kreisring holomorph sind. Wir werden sehen, dass sich diese auch in Potenzreihen entwickeln lassen, allerdings nur, wenn man negative Exponenten zulässt. Wir verwenden die folgenden Notationen: Seien reelle Zahlen $r \in [0, \infty)$ und $R \in (0, \infty]$ mit $r < R$ gegeben. Wichtig ist, dass dabei die Randfälle $r = 0$ und $R = \infty$ zugelassen sind. Dann setzen wir für eine komplexe Zahl $z_0 \in \mathbb{C}$

$$K(z_0; r, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\},$$

und nennen $K(z_0; r, R)$ den durch die Radien r, R gegebenen Kreisring um z_0. Natürlich ist dabei

$$K(z_0; 0, R) = B_R(z_0) \backslash \{z_0\} \qquad \text{und} \qquad K(z_0; r, \infty) = \mathbb{C} \backslash D_r(z_0).$$

Wir untersuchen jetzt Funktionen, welche auf einem Kreisring $K(z_0; r, R)$ holomorph sind.

Satz 4.9. *Seien wie oben r, R gegeben, sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und sei $f \in \mathcal{O}(K(z_0; r, R))$. Dann existieren Funktionen $f_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \backslash D_r(z_0))$ und $f_2 \in \mathcal{O}(B_R(z_0))$, so dass*

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

für alle $z \in K(z_0; r, R) = (\mathbb{C} \backslash D_r(z_0)) \cap B_R(z_0)$ gilt. Dabei kann man f_1 so wählen, dass zusätzlich

$$\lim_{z \to \infty} f_1(z) = 0$$

gilt, und durch diese Wahl sind f_1 und f_2 eindeutig bestimmt. Wir nennen f_1 den Hauptteil *und f_2 den Nebenteil der in $K(z_0; r, R)$ holomorphen Funktion f.*

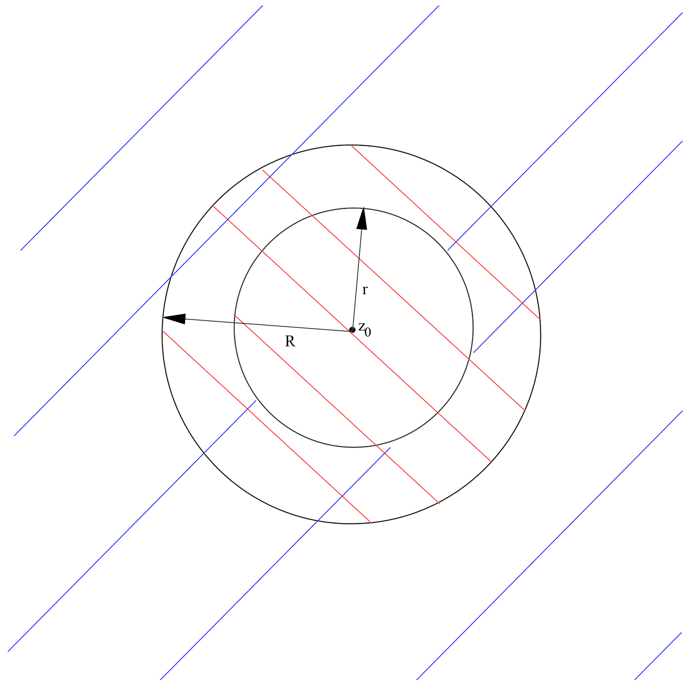

Abbildung 4.1: Haupt- und Nebenteil

Zur Veranschaulichung des Satzes beachte man die Abbildung 4.1, bei dem der Konvergenzbereich des Hauptteils blau gestreift, und der Konvergenzbereich des Nebenteils rot gestreift eingezeichnet sind.
Zum Beweis benötigen wir einige Vorbereitungen. Wir zeigen Varianten des Integralsatzes bzw. der Integralformel von Cauchy für Funktionen, welche auf Kreisscheiben holomorph sind. Konkret gilt die folgende Aussage.

Lemma 4.10 (Integralsatz von Cauchy für Kreisringe)**.** *Seien* $0 \leq r < R \leq \infty$*, sei* $f \in \mathcal{O}(K(z_0; r, R))$ *und seien* $\rho_1, \rho_2 \in (r, R)$ *mit* $\rho_1 > \rho_2$ *gegeben. Dann gilt*

$$\int_{\partial D_{\rho_1}(z_0)} f(\zeta) d\zeta = \int_{\partial D_{\rho_2}(z_0)} f(\zeta) d\zeta$$

Beweis. Wir geben einen Beweis, welcher die (verschobene) Exponentialfunktion

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\exp} : \mathbb{C} & \longrightarrow & K(z_0; 0, \infty) \\ t & \mapsto & z = \exp(t) + z_0 \end{array}$$

benutzt. Wir erinnern daran, dass die Exponentialfunktion horizontale Geraden in $\mathbb{C}$, d.h. Teilmengen der Form $\{t = a + ib_0 \,|\, b \in \mathbb{R}\}$ mit festem Imaginärteil auf Strahlen $\{z = \exp(a) \cdot \exp(ib_0)\} + z_0$ in $K(z_0; 0, \infty)$ mit festem Winkel $b_0 \mod 2\pi$ abbildet. Analog werden Teilmengen der Form $\{t = a_0 + ib \,|\, b \in \mathbb{R}\}$ mit festem Realteil auf Kreise $\{z = \exp(a_0) \cdot \exp(ib)\}\} + z_0$ in $K(z_0; 0, \infty)$ mit Radius $\exp(a_0)$ abgebildet.
Zur notationellen Vereinfachung schreiben wir $A := \partial D_{\rho_1}(z_0)$ und $B := \partial D_{\rho_2}(z_0)$. Wir wählen $s, S \in \mathbb{R}$ mit $\exp(s) = \rho_2$ und $\exp(S) = \rho_1$ sowie $p, P \in \mathbb{R}$ mit $\exp(p) = r$ und $\exp(P) = R$ (so dass dann $p < s < S < P$ gilt. Wir betrachten die Situation wie in Bild 4.2 dargestellt. Dabei ist der Weg $\gamma_1 + \ldots + \gamma_4$ ein geschlossener Integrationsweg in $\mathbb{C}$, und dieser wird durch die Exponentialfunktion auf den Weg $A + \gamma + B - \gamma$ in $\mathbb{C}^*$ abgebildet. Man beachte außerdem, dass der Integrationsweg $\gamma_1 + \ldots + \gamma_4$ vollständig im Sterngebiet $\{t \in \mathbb{C} \,|\, \Re(t) \in (p, P)\}$ liegt.

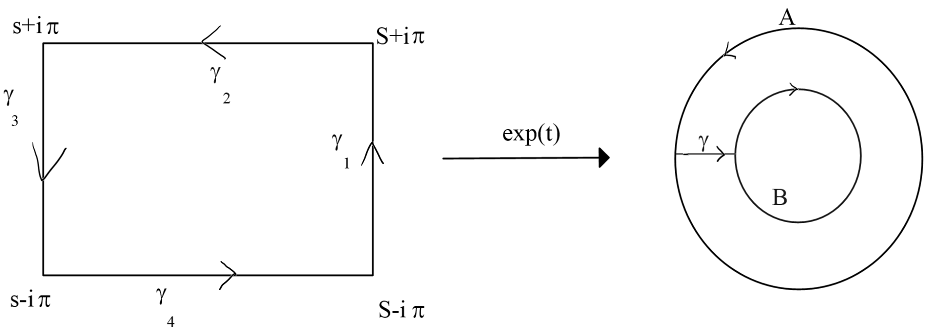

Abbildung 4.2: Exponentialfunktion und Kreisring

Es gilt nun

$$\begin{aligned}\int_{\partial D_{\rho_1}(z_0)} f(\zeta)d\zeta - \int_{\partial D_{\rho_1}(z_0)} f(\zeta)d\zeta &= \int_{A+B} f(\zeta)d\zeta = \int_{A+\gamma-\gamma+B} f(\zeta)d\zeta \\ &= \int_{\gamma_1+\ldots+\gamma_4} f(\widetilde{\exp}(t))\cdot d(\widetilde{\exp}(t)) = \int_{\gamma_1+\ldots+\gamma_4} f(\widetilde{\exp}(t))\cdot \exp(t)\cdot dt\end{aligned}$$

Der Umformungsschritt von der ersten zur zweiten Zeile ist dabei nicht anderes als die Transformationsformel (siehe Satz 3.5, 6.). Nach Voraussetzung gilt $f \in \mathcal{O}(K(z_0; r, R))$, da aber das Sterngebiet $\{t \in \mathbb{C} \,|\, \Re(t) \in (p, P)\}$ durch $\widetilde{\exp}$ nach $K(z_0; r, R)$ abgebildet wird, folgt, dass die Funktion $f(\widetilde{\exp}(t))\cdot\exp(t)$ in $\{t \in \mathbb{C} \,|\, \Re(t) \in (p, P)\}$ holomorph ist. Dann liefert der „gewöhnliche“ Integralsatz von Cauchy (also Satz 3.14), dass

$$\int_{\gamma_1+\ldots+\gamma_4} f(\widetilde{\exp}(t))\cdot \exp(t)\cdot dt = 0$$

gilt. Wir bekommen also

$$\int_A f(\zeta)d\zeta = \int_B f(\zeta)d\zeta.$$

□

Als Konsequenz erhalten wir die folgende Formel.

Korollar 4.11 (Integralformel von Cauchy für Kreisringe)**.** *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, seien $0 \le r < R \le \infty$, und sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so dass $\overline{K(z_0; r, R)} \subset U$ gilt. Sei weiterhin $f \in \mathcal{O}(U)$, dann gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

für alle $z \in K(z_0; r, R)$.

Beweis. Fixiere ein $z \in K(z_0; r, R)$. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} g : U &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \zeta &\longmapsto \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \text{für } \zeta \in U\backslash\{z\} \\ f'(z) & \text{für } \zeta = z \end{cases}\end{aligned}$$

auf U stetig, und holomorph außerhalb von z. Damit ist sie nach Korollar 3.22 auch auf ganz U holomorph. Also gilt dann nach dem Integralsatz von Cauchy für Kreisringe, dass

$$\int_{\partial D_r(z_0)} g(\zeta)d\zeta = \int_{\partial D_R(z_0)} g(\zeta)d\zeta$$

ist. Ausformuliert heißt dass:

$$\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}d\zeta,$$

also

$$\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - f(z)\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{1}{\zeta - z}d\zeta = \int_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - f(z)\int_{\partial D_R(z_0)} \frac{1}{\zeta - z}d\zeta \tag{4.2}$$

Nun gilt: Die Funktion $\frac{1}{\zeta - z}$ ist auf $D_r(z_0)$ holomorph, da $|z - z_0| > r$ ist. Damit folgt aus dem Integralsatz von Cauchy für Sterngebiete 3.14, dass $\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{1}{\zeta - z}d\zeta = 0$ gilt. Andererseits haben wir im Beweis der Integralformel von Cauchy (Satz 3.15), speziell Formel (3.4), gesehen, dass

$$\int_{\partial D_R(z_0)} \frac{1}{\zeta - z}d\zeta = 2\pi i$$

gilt, da $z \in B_R(z_0)$ ist. Also bekommen wir aus Formel (4.2)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right).$$

□

Beweis von Satz 4.9. Sei $\rho \in (r, R)$ gegeben, dann ist die Funktion

$$f_{2,\rho} := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

holomorph auf $B_\rho(z_0)$. Wählen wir nun $\widetilde{\rho}$ mit $r < \rho < \widetilde{\rho} < R$, so ist nach dem Integralsatz für Kreisringe (siehe Lemma 4.10)

$$f_{2,\rho}(z) = f_{2,\widetilde{\rho}}(z)$$

für alle $z \in B_\rho(z_0)$, also wird durch

$$f_2(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

wobei $\max(r, |z - z_0|) < \rho < R$ gilt, ein Element aus $\mathcal{O}(B_R(z_0))$ definiert. Analog definiert

$$f_1(z) := -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\sigma(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

für $r < \sigma < \min(R, |z - z_0|)$ eine auf $\mathbb{C}\backslash D_r(z_0)$ holomorphe Funktion.
Sei nun ein Wert $z \in K(z_0; r, R)$ vorgegeben. Dann wählen wir ρ, σ, so dass $r < \sigma < |z - z_0| < \rho < R$ gilt. Dann ist $\overline{K(z_0, \sigma, \rho)} \subset K(z_0; r, R) =: U$, so dass wir die Integralformel für Kreisringe (Korollar 4.11) anwenden können. Es gilt daher

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\sigma(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = f_1(z) + f_2(z).$$

Wir verwenden nun die Standardabschätzung (siehe Satz 3.5, 2.) für die Funktion f_1: Es gilt

$$|f_1(z)| \leq \frac{1}{|2\pi i|} \underbrace{L(\partial D_\sigma(z_0))}_{=2\pi\sigma} \cdot \max_{\zeta \in \partial D_\sigma(z_0)} |f(\zeta)/(\zeta - z)| = \sigma \cdot \max_{\zeta \in \partial D_\sigma(z_0)} |f(\zeta)/(\zeta - z)|$$

Weiterhin ist für alle $\zeta \in \partial D_\sigma(z_0)$

$$\frac{1}{|\zeta - z|} = \frac{1}{|\zeta - z_0 - (z - z_0)|} \leq \frac{1}{|z - z_0| - |\zeta - z_0|} = \frac{1}{|z - z_0| - \sigma}$$

wobei Abschätzung eine Version der Dreiecksungleichung ist. Also bekommen wir

$$|f_1(z)| \leq \frac{\rho}{|z - z_0| - \sigma} \cdot \max_{\zeta \in \partial D_\sigma(z_0)} f(\zeta)$$

und daher also $\lim_{z\to\infty} f_2(z) = 0$ (da der Term $\max_{\zeta \in \partial D_\sigma(z_0)} f(\zeta)$ nicht mehr von z abhängt).
Wir haben noch die Eindeutigkeit der Zerlegung $f = f_1 + f_2$ zu beweisen. Angenommen, es gäbe Funktionen $g_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\backslash D_r(z_0))$ und $g_2 \in \mathcal{O}(B_R(z_0))$ mit $f = g_1 + g_2$. Dann gilt

$$f_1(z) - g_1(z) = f_2(z) - g_2(z)$$

für alle $z \in K(z_0; r, R)$, d.h., wenn wir $h := f_1 - g_1$ auf $\mathcal{O}(\mathbb{C}\backslash D_r(z_0))$ und $h := f_2 - g_2$ auf $B_r(z_0)$ setzten, dann erhalten wir eine ganze Funktion $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Nun ist wegen $\lim_{z\to\infty} f_2(z) = \lim_{z\to\infty} g_2(z) = 0$ aber auch $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$, also ist h_2 beschränkt und daher nach dem Satz von Liouville (Korollar 3.28) konstant, aber eben wegen $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$ folgt, dass $h \equiv 0$ gilt. Also ist $f_1 = g_1$ und $f_2 = g_2$ und damit der Satz bewiesen. $\square$

Wir wollen nun für in Kreisringen holomorphe Funktionen einen Entwicklungssatz analog zu Satz 3.17. Hierzu müssen wir natürlich zunächst den Begriff einer Reihe verallgemeinern.

Definition 4.12. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ fest gewählt. Eine Reihe der Form*

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

heißt eine (formale) Laurentreihe. Wir nennen die Reihe

$$f_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

den Hauptteil von f, und die Reihe

$$f_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

den Nebenteil von f.

Sei R der Konvergenzradius der Reihe f_2, dann ist $f_2 \in \mathcal{O}(B_R(z_0))$. Sei weiterhin $1/r$ der Konvergenzradius der Reihe

$$g_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$$

Dann ist $g_1 \in \mathcal{O}(B_{1/r}(0))$. Betrachte die Abbildung:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{C}\backslash D_r(z_0) & \longrightarrow & B_{1/r}(0)\backslash\{0\} \\ w & \longmapsto & 1/(w - z_0) \end{array}$$

Dies ist natürlich eine holomorphe Abbildung, und man sieht, dass sie bijektiv ist, denn es ist durch $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta} + z_0$ eine Umkehrabbildung gegeben. Diese ist auch holomorph, und wir sagen, dass φ eine biholomorphe Abbildung ist. Insbesondere ist dann die Komposition $g_1 \circ \varphi$ holomorph, also ein Element von $\mathcal{O}(\mathbb{C}\backslash D_r(z_0))$. Durch Einsetzen sehen wir aber, dass $f_1(z) = g_1 \circ \varphi$ gilt. Falls nun $0 < r < R$ gilt, sind f_1 und f_2 beide auf $K(z_0; r, R)$ holomorph, und damit auch die Summe $f = f_1 + f_2$. In diesem Fall sagen wir, dass die Laurenreihe $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ konvergent ist.
Eine Umkehrung dieser Argumentation liefert den folgenden Entwicklungssatz für in Funktionen, welche in Kreisscheiben holomorph sind.

Satz 4.13. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, seien $0 \leq r < R \leq \infty$ gegeben, und sei $f \in \mathcal{O}(K(z_0; r, R))$. Dann hat f eine Entwicklung als Laurentreihe, d.h., es gilt*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für alle $z \in K(z_0; r, R)$. Wir schreiben

$$\widetilde{f_1}(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n$$

sowie

$$\widetilde{f_2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

dann konvergiert $\widetilde{f_1}$ auf $\mathbb{C}\backslash D_r(z_0)$ lokal gleichmäßig gegen den Hauptteil f_1 von f und $\widetilde{f_2}$ konvergiert auf $B_R(z_0)$ lokal gleichmäßig gegen den Nebenteil f_2 von f. Es gilt

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} d\zeta \tag{4.3}$$

für ein beliebiges $\rho \in (r, R)$ und für alle $m \in \mathbb{Z}$.

Bevor wir den Beweis geben, betrachten wir einige Beispiele zur Laurententwicklung.

1. Sei die Funktion
$$f(z) = \frac{1}{z - \zeta}$$
für festes $\zeta \in \mathbb{C}$ gegeben. Wir haben folgende Fälle (bei denen wir jeweils die geometrische Reihe verwenden)
   (a) $|z| < |\zeta|$: Dann ist die Funktion f in $B_{|\zeta|}(0)$ holomorph, und daher haben wir die Potenzreihenentwicklung
   $$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\zeta^{n+1}} z^n$$
   (b) $|z| > |\zeta|$: In diesem Fall hat die Funktion f einen Pol bei $z = \zeta$, daher bekommen wir eine Laurententwicklung
   $$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \zeta^n \cdot z^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \zeta^{-n-1} z^n$$
2. Sei
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$
Wir haben 3 verschiedene Entwicklungen um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$:

(a) Auf $B_1(0)$ ist f holomorph und wir haben dort eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n\geq 0} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$$

(b) Auf $K(0;1,2)$ haben wir eine holomorphe Funktion in einem Kreisring, und bekommen daher eine Laurententwicklung von $f(z)$. Präziser ist die Funktion $z \mapsto 1/(2-z)$ in $B_2(0)$ nach wie vor holomorph, aber nicht die Funktion $z \mapsto 1/1-z$, diese ist hingegen in $B(0;1,\infty)$ holomorph. Wir haben also

$$f(z) = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0} z^{-n} - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} z^n$$

(c) Auf $K(0;2,\infty)$ haben wir ebenfalls eine Laurententwicklung

$$f(z) = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0} z^{-n} + \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n$$

Beweis von Satz 4.13. Wir verwenden zunächst die Existenz von $f_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\backslash D_r(z_0))$ und $f_2 \in \mathcal{O}(B_R(z_0))$, mit $f = f_1 + f_2$ aus Satz 4.9. Natürlich existieren nach dem „gewöhnlichen“ Entwicklungssatz (Satz 3.17) Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C}$, so dass

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

für alle $z \in B_R(z_0)$ gilt, und diese Reihe konvergiert lokal gleichmäßig auf $B_R(z_0)$ (zur Erinnerung: dies bedeutet, dass sie für alle $R' < R$ auf $D_{R'}(z_0)$ gleichmäßig konvergiert).
Betrachte andererseits die biholomorphe Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \psi := \varphi^{-1} : B_{1/r}(0)\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\backslash D_r(z_0) \\ \zeta & \longmapsto & \frac{1}{\zeta} + z_0 \end{array}$$

Dann ist $f_1 \circ \psi \in \mathcal{O}(B_{1/r}(0)\backslash\{0\})$. Wegen $\lim_{z\to\infty} f_1(z) = 0$ folgt $\lim_{\zeta\to 0}(f_1\circ\psi)(\zeta) = 0$, also ist $f_1 \circ \psi$ in einer Umgebung von 0 beschränkt, und damit existiert nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz (Korollar 3.23) eine holomorphe Fortsetzung $\widehat{f_1\circ\psi} \in \mathcal{O}(B_{1/r}(0))$ mit $(\widehat{f_1\circ\psi})(0) = 0$. Also haben wir eine Potenzreihenentwicklung

$$(\widehat{f_1\circ\psi})(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n,$$

aber wegen $(\widehat{f_1\circ\psi})(0) = 0$ ist $b_0 = 0$. Natürlich konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\zeta^n$ auf $B_{1/r}(0)$ lokal gleichmäßig gegen die Funktion $\widehat{f_1\circ\psi}$. Wir schlussfolgern

$$f_1(z) = ((\widehat{f_1\circ\psi})\circ\varphi)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\varphi(z))^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$$

Setzen wir $a_{-n} := b_n$ für $n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}\backslash D_r(z_0)$, also gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

für alle $z \in K(z_0; r, R)$, und die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergiert lokal gleichmäßig auf $K(z_0; r, R)$ gegen $f(z)$.
Um die Formel (4.3) zu beweisen, verwenden wir genau diese Eigenschaft der lokal gleichmäßigen Kovergenz: Zunächst gilt für alle $m \in \mathbb{Z}$, dass

$$(z-z_0)^{-(m+1)} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-m-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{n+m+1}(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m+1}(z-z_0)^n$$

Beide Summanden konvergieren auf $K(z_0; r, R)$ lokal gleichmäßig gegen ihre Grenzwerte, daher folgern wir durch Vertauschen von Integration und Summenbildung (völlig analog zum Beweis von Satz 3.17), dass

$$\int_{\partial D_\rho(z_0)} (\zeta - z_0)^{-(m+1)} \cdot f(\zeta) d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{n+m+1} \int_{\partial D_\rho(z_0)} (\zeta - z_0)^n d\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m+1} \int_{\partial D_\rho(z_0)} (\zeta - z_0)^n d\zeta$$

Es gilt nun

$$\int_{\partial D_\rho(z_0)} (\zeta - z_0)^n d\zeta = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

wegen der Formeln (3.1) und (3.2). Wir schlußfolgern, dass $\int_{\partial D_\rho(z_0)} (\zeta - z_0)^{-(m+1)} \cdot f(\zeta) d\zeta = a_m \cdot 2\pi i$ ist, d.h., wir haben die Formel

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} d\zeta$$

für die Koeffizienten der Laurententwicklung von f. □

Wir können den letzten Satz für den Spezialfall von punktierten Kreisscheiben anwenden, und die verschiedenen Typen von Singularitäten von holomorphen Funktionen an ihrer Laurententwicklung ablesen.

Korollar 4.14. *Sei U ein Gebiet, $z_0 \in U$ und $f \in \mathcal{O}(U \backslash \{z_0\})$ eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität in z_0. Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $K(z_0; 0, \varepsilon) \subset U$ gilt, dann hat f auf $K(z_0; 0, \varepsilon)$ die Laurententwicklung*

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Dann gilt:

1. *f hat bei z_0 eine hebbare Singularität genau dann, wenn $a_n = 0$ gilt für alle $n < 0$.*
2. *f hat bei z_0 einen Pol der Ordnung m, falls $a_{-m} \neq 0$ ist und falls $a_n = 0$ gilt für alle $n < -m$.*
3. *f hat bei z_0 eine wesentliche Singularität falls gilt*

$$|\{n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}_0 \,|\, a_n \neq 0\}| = \infty.$$

Beweis. Der Beweis ergibt sich direkt aus der Definition der verschiedenen Typen von Singularitäten (also aus Definition 4.2): Falls $a_n = 0$ für alle $n < 0$, dann ist $f = f_2$, also ist $f_2 \in \mathcal{O}(U)$ eine holomorphe Fortsetzung von f (d.h., $\widehat{f} = f_2$), und damit hat f eine hebbare Singularität bei z_0. Dies gleiche Argumentation funktioniert auch in die andere Richtung. Analog haben wir einen Pol der Ordnung m, falls $(z-z_0)^m \cdot f$ eine hebbare Singularität hat, und dies ist dazu äquivalent, dass $(z-z_0)^m \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ keinen Hauptteil hat (und das dies nicht für ein kleineres m gilt. Schließlich ist per Definition eine wesentliche Singularität eine, die kein Pol und nicht hebbar ist, also müssen bei ihrer Laurententwicklung unendlich viele Koeffizienten von negativen Potenzen von $z - z_0$ ungleich Null sein. □

4.3 Der Residuensatz und Anwendungen auf reelle Integrale

Als Anwendung unsere obigen Diskussion von Laurententwicklungen und als eine der schönsten Aussagen der Funktionentheorie überhaupt wollen wir hier den Residuensatz formulieren und beweisen. Er erlaubt es, gewisse Integrale dadurch auszuwerten, dass man den Integranden geeignet fortsetzt, eventuell isolierte Singularitäten zuläßt, und dann nur noch das Verhalten der Funktion in der Umgebung solch ener Singularität betrachtet.
Wir benötigen für den Residuensatz den Begriff der Umlaufzahl oder des Index eines Integrationsweges. Als Vorbereitung wiederholen wir einige wenige Begriffe aus der Topologie.

Definition-Lemma 4.15. *Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, dann heißen zwei Punkte $x, y \in M$ verbindbar, falls es einen stetigen Weg $\gamma : [a, b] \to M$ mit Anfangspunkt a und Endpunkt b gibt. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf M. Die Äquivalenzklassen heißen Wegzusammenhangskomponenten. M heißt wegzusammenhängend, wenn es aus nur einer Äquivalenzklasse besteht. Man kann zeigen, dass zusammenhängende Mengen (siehe Definition 1.4) auch wegzusammenhängend sind.*

Auf den Beweis verzichten wir hier aus Zeitgründen, man findet ihn in jedem Buch über Topologie.
Wir definieren nun die Umlaufzahl eines Integrationswegs.

Definition 4.16. *Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg, und sei $z_0 \in \mathbb{C}\backslash Sp(\gamma)$. Dann definieren wir*

$$\mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}.$$

als den Index *oder die* Umlaufzahl *von γ bezüglich z_0.*

Zunächst beweisen wir die folgenden zwei Eigenschaften der Umlaufzahl.

Lemma 4.17. *1. Es ist $\mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma) \in \mathbb{Z}$.*

2. Die Funktion

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Ind}(\gamma) : \mathbb{C}\backslash Sp(\gamma) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ z_0 & \longmapsto & \mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma)\end{array}$$

ist lokal konstant, d.h., für alle $z_0 \in \mathbb{C}\backslash Sp(\gamma)$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}\backslash Sp(\gamma)$, so dass die Einschränkung $\mathrm{Ind}(\gamma)_{|U}$ konstant ist.

Beweis. 1. Wir haben schon gesehen (Satz 3.5, 3.), dass Kurvenintegrale unter Umparametrisierungen invariant sind, also können wir $[a, b] = [0, 1]$ annehmen. Definiere

$$h(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds$$

Dann ist $h(0) = 0$ und $h(1) = \mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma)$. Wir beweisen jetzt, dass

$$\exp(2\pi i h(1)) = 1$$

gilt. Aufgrund der Eigenschaften der Exponentialfunktion (Periodizität etc., siehe die Diskussion auf Seite 23) folgt dann, dass $\mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma) = h(1) \in \mathbb{Z}$ gilt.

Sei

$$g(t) = \exp(-2\pi i h(t)) \cdot (\gamma(t) - z_0),$$

dann ist

$$\begin{aligned} g'(t) &= \exp(-2\pi i h(t)) \cdot \gamma'(t) - 2\pi i h'(t) \cdot \exp(-2\pi i h(t)) \cdot (\gamma(t) - z_0) \\ &= \exp(-2\pi i h(t)) \cdot (\gamma(t) - z) \cdot \left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} - 2\pi i h'(t)\right) \end{aligned}$$

Offensichtlich ist aber

$$h'(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0},$$

also folgt $g'(t) \equiv 0$, und damit ist $g(t)$ konstant, sei $c := g(t)$ für alle $t \in [0,1]$. Wir haben also

$$\gamma(t) - z_0 = c \cdot \exp(2\pi i h(t)).$$

Wegen $z_0 \notin \mathrm{Sp}(\gamma)$ ist $c \neq 0$, und da γ ein geschlossener Integrationweg ist (d.h., $\gamma(0) = \gamma(1)$), bekommen wir

$$c \cdot \exp(2\pi i h(0)) = \gamma(0) - z_0 = \gamma(1) - z_0 = c \cdot \exp(2\pi i h(1)),$$

also $\exp(2\pi i h(0)) = \exp(2\pi i h(1))$. Aber wegen $h(0) = 0$ ist $\exp(2\pi i h(0)) = 1$, und damit haben wir $\mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma) = h(1) \in \mathbb{Z}$ bewiesen.

2. Da der Integrand in der Definition von $\mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma)$ stetig von z_0 abhängt und da wir gemäß Lemma 3.18 Integration und Grenzwertbildung vertauschen können, folgt, dass die Funktion $\mathrm{Ind} : \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(\gamma) \to \mathbb{Z}$ stetig ist. Aber da ihr Wertebereich $\mathbb{Z}$ ist, muss sie natürlich lokal konstant sein.

□

Die Umlaufzahl ist ein wichtiges Hilfsmittel, um den Residuensatz formulieren zu können. Um diesen anzuwenden, müssen wir Umlaufzahlen auch konkret ausrechnen. Anschaulich beschreibt die Umlaufzahl, we oft der Integrationweg um den gegebenen Punkt „herumläuft“. Das wollen wir im folgenden präzisieren.

Definition 4.18. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg. Dann sagen wir, dass γ in U von Rand zu Rand läuft, wenn gilt:*

1. *Es gibt $t_1, t_2 \in [a,b]$ mit $t_1 < t_2$ und $\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in \partial U$ sowie $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.*
2. *Für alle $t \in (t_1, t_2)$ ist $\gamma(t) \in U$.*
3. *Für alle $t \in [a,b] \setminus [t_1, t_2]$ ist $\gamma(t) \notin \overline{U}$.*
4. *$U \setminus Sp(\gamma)$ hat genau zwei Wegzusammenhangskomponenten, und $Sp(\gamma) \cap G$ liegt auf dem Rand jeder dieser Komponenten.*

Zur Illustration dienen die folgenden zwei Beispiele (Bild 4.3)

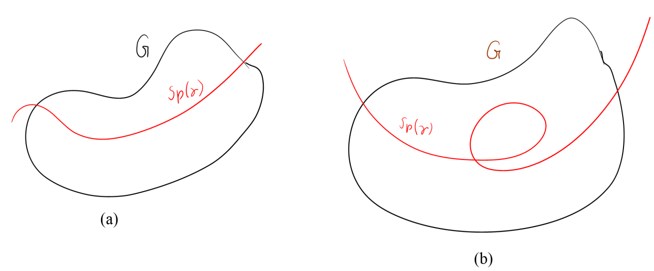

Abbildung 4.3: (a) ist Weg von Rand zu Rand, (b) nicht

Ist γ stetig differentierbar und injektiv, dann gibt es zu jedem $z \in \mathrm{Sp}(\gamma)$ ein $\varepsilon > 0$, so dass γ in $B_\varepsilon(z)$ von Rand zu Rand läuft.
Sei nun $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg und sei $D := D_\varepsilon(z_0)$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$. Es laufe γ in D von Rand zu Rand, und seien $t_1, t_2 \in [a,b]$ mit $t_1 < t_2$ mit $\gamma(t_1) = z_1$, $\gamma(t_2) = z_2$ und $z_1, z_2 \in \partial D$. Sei $\gamma_0 := \gamma_{|[t_1,t_2]}$.

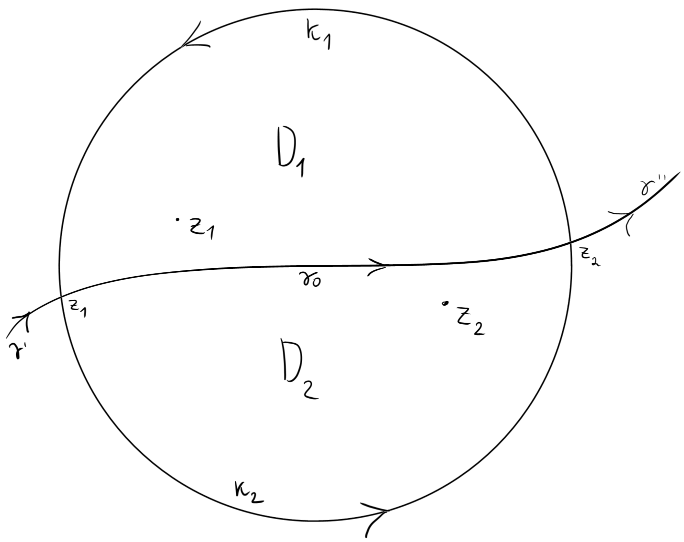

Abbildung 4.4: Wege von Rand zu Rand

Wir zerlegen den Rand ∂D in zwei Kreisstücke κ_1 und κ_2 wie in der Skizze 4.4, und beide sollen positiven Umlaufsinn haben, d.h., es soll

$$\begin{array}{rcl} \kappa_1\kappa_2 : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & z_0 + \varepsilon \cdot \exp(it) \end{array}$$

gelten. Es sei $D \backslash \mathrm{Sp}(\gamma_0) = D_1 \cup D_2$ die Zerlegung in Wegzusammenhangskomponenten derart, dass $\mathrm{Sp}(\kappa_i) \subset D_i$ für $i = 1, 2$ gelte. Dann haben wir folgendes Ergebnis

Satz 4.19. *Für $z_1 \in D_1$ und $z_2 \in D_2$ ist*

$$\mathrm{Ind}_{z_1}(\gamma) = \mathrm{Ind}_{z_2}(\gamma) + 1.$$

Beweis. Wir schreiben γ als eine Zusammensetzung von Teilwegen, also

$$\gamma = \gamma'\gamma_0\gamma''$$

mit $\mathrm{Sp}(\gamma'), \mathrm{Sp}(\gamma'') \subset \mathbb{C} \backslash D$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_{z_1}(\gamma) &= \mathrm{Ind}_{z_1}(\gamma'\gamma_0\gamma'') = \mathrm{Ind}_{z_1}(\gamma'\gamma_0\kappa_2^{-1}\kappa_2\gamma'') = \mathrm{Ind}_{z_1}(\gamma'\kappa_2\gamma'') + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0\kappa_2^{-1}} \frac{d\zeta}{\zeta - z_1} \\ &= \mathrm{Ind}_{z_1}(\gamma'\kappa_2\gamma'') + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_2} \frac{d\zeta}{\zeta - z_1} = \mathrm{Ind}_{z_1}(\gamma'\kappa_2\gamma''), \end{aligned}$$

denn $1/(\zeta - z_1)$ ist auf D_2 holomorph und es gilt der verallgemeinerte Integralsatz von Cauchy, welcher besagt, dass das Integral holomorpher Funktionen über geschlossene Integrationswege auch dann verschwindet, wenn dieser Weg nicht notwendig ein Kreis, sondern etwas allgemeiner „zusammenziehbar" ist, was anschaulich bedeutet, dass er durch eine stetige Verformung auf einen Punkt zusammengezogen werden kann. Diesen Satz können wir aus Zeitgründen nicht mehr beweisen, wir werden ihn hier aber trotzdem verwenden, d.h., wir verwenden, dass $\int_{\partial D_2} \frac{d\zeta}{\zeta - z_1} = 0$ gilt.

Analog gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{z_1}(\gamma'\kappa_2\gamma'') &= \mathrm{Ind}_{z_1}(\gamma'\kappa_1^{-1}\kappa_1\kappa_2\gamma'') = \mathrm{Ind}_{z_1}(\gamma'\kappa_1^{-1}\gamma'') + \mathrm{Ind}_{z_1}(\kappa_1\kappa_2)\\ &= \mathrm{Ind}_{z_2}(\gamma'\kappa_1^{-1}\gamma'') + 1.\end{aligned}$$

Man bemerke, dass $\mathrm{Ind}_{z_1}(\gamma'\kappa_1^{-1}\gamma'') = \mathrm{Ind}_{z_2}(\gamma'\kappa_1^{-1}\gamma'')$ wegen ??? gilt, und natürlich ist

$$\mathrm{Ind}_{z_1}(\kappa_1\kappa_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{d\zeta}{\zeta - z_1} = 1.$$

Schließlich ist

$$\mathrm{Ind}_{z_2}(\gamma'\kappa_1^{-1}\gamma'') = \mathrm{Ind}_{z_2}(\gamma'\kappa_1^{-1}\kappa_1\gamma_0\gamma'') = \mathrm{Ind}_{z_2}(\gamma'\gamma_0\gamma''),$$

da wir

$$\mathrm{Ind}_{z_2}(\kappa_1\gamma_0) = \int_{\partial D_1}\frac{d\zeta}{\zeta - z_2} = 0$$

haben (der Integrand $1/(\zeta - z_2)$ ist auf D_1 holomorph). Damit bekommen wir

$$\mathrm{Ind}_{z_1}(\gamma) = \mathrm{Ind}_{z_2}(\gamma) + 1.$$

□

Wir benötigen nun noch den folgenden Begriff.

Definition 4.20. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $z_0 \in U$ und $f \in \mathcal{O}(U\backslash\{z_0\})$. Sei*

$$f = \sum_{n \geq n_0} a_i(z - z_0)^n$$

die Laurententwicklung von f um z_0 (mit $n_0 \in \mathbb{Z}$). Dann heißt

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) := a_{-1} = \int_{\partial D_r(z_0)} f(\zeta)d\zeta$$

das Residuum von f bei z_0, wobei $r > 0$ so ist, dass $D_r(z_0) \in U$ gilt.

Dass der Koeffizient a_1 sich tatsächlich durch dieses Integral berechnet, haben wir bereits in Formel (4.3) im Satz 4.13 gesehen. Man beachte auch, dass das Residuum verschwindet, falls die Singularität bei z_0 hebbar ist, dann ist auch der Hauptteil der Laurententwicklung gleich Null.
Nun können wir den Residuensatz, einen der Höhepunkte der Funktionentheorie, formulieren und beweisen.

Satz 4.21 (Residuensatz)**.** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet, sei $\Sigma := \{z_1, \ldots, z_N\} \subset U$ eine endliche Teilmenge, und sei eine Funktion $f \in \mathcal{O}(U\backslash\Sigma)$ gegeben. Sei $\gamma : [a, b] \to U\backslash\Sigma$ ein geschlossener Integrationsweg, dann gilt*

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \cdot \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Ind}_{z_i}(\gamma) \cdot \mathrm{Res}_{z_i}(f)$$

Wir können also, wenn wir die Laurententwicklung einer Funktion an allen Singularitäten kennen und wenn wir für einen gegebenen Integrationsweg die Umlaufzahlen an diesen Singularitäten bestimmen können, das Integral der Funktion über den Integrationsweg bestimmen, ohne die Integration wirklich ausführen zu müssen.

Beweis. Sei für $i = 1, \dots N$ durch

$$h_i := \frac{\mathrm{Res}_{z_i}(f)}{z - z_i} + \frac{a_2^{(i)}}{(z - z_i)^2} + \dots$$

der Hauptteil der Laurententwicklung von f bei z_i gegeben. Dann ist h_i eine auf $\mathbb{C}\backslash\{z_i\}$ holomorphe Funktion (dies folgt aus Satz 4.13), d.h., auch die Funktion

$$h := f - \sum_{i=1}^{N} h_i$$

ist auf $U\backslash\Sigma$ holomorph. Aber natürlich verschwinden die Hauptteile der Laurententwicklung von h bei z_i, d.h., h hat bei alles z_i hebbare Singularitäten, setzt sich also zu einer Funktion $\widehat{h} \in \mathcal{O}(U)$ fort. Damit gilt nach dem Integralsatz von Cauchy, dass $\int_\gamma \widehat{h}(\zeta)d\zeta = 0$ ist, aber das bedeutet

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = \sum_{i=1}^{N} \int_\gamma h_i(\zeta)d\zeta$$

Weiterhin hat für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ und für alle $k > 1$ die Funktion

$$\frac{a_k^{(i)}}{(z - z_i)^k}$$

eine Stammfunktion, also gilt

$$\int_\gamma \frac{a_k^{(i)}}{(z - z_i)^k} = 0,$$

und somit erhalten wir

$$\int_\gamma h_i(\zeta)d\zeta = \int_\gamma \frac{\mathrm{Res}_{z_i}(f)}{\zeta - z_i}d\zeta = \mathrm{Res}_{z_i}(f) \cdot \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_i}d\zeta = \mathrm{Res}_{z_i}(f) \cdot 2\pi i \cdot \mathrm{Ind}_{z_i}(\gamma),$$

also insgesamt

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \cdot \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Res}_{z_i}(f) \cdot \mathrm{Ind}_{z_i}(\gamma).$$

□

Wir wollen als Anwendung des Residuensatzes studieren, wie wir gewisse reelle Integrale berechnen können, indem wir die Integranden ins Komplexe fortsetzen. Wir starten mit einem typischen Beispiel. Wir wollen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + z^2} dz$$

bestimmen. Zunächst berechnen wir das Integral

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1 + z^2} dz$$

für $R > 1$. Dies können wir mit Hilfe des Residuensatzes machen, indem wir die Funktion $f(z) := 1/(1 + z^2)$ ins Komplexe fortsetzen, dann ist $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\backslash\{i, -i\})$. Wir wählen als Integrationsweg die stückweise stetig differentierbare Kurve $\gamma := \gamma_1\gamma_2$, wobei $\mathrm{Sp}(\gamma_1) = [-R, R]$ und $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto R \cdot \exp(it)$ ist. Nach dem Residuensatz (Satz 4.21) gilt nun

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{[-R,R]} \frac{dz}{1 + z^2} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{1 + z^2} = 2\pi i \left(\mathrm{Ind}_{-i}(\gamma) \cdot \mathrm{Res}_{-i}(f(z)) + \mathrm{Ind}_i(\gamma) \cdot \mathrm{Res}_i(f(z))\right)$$

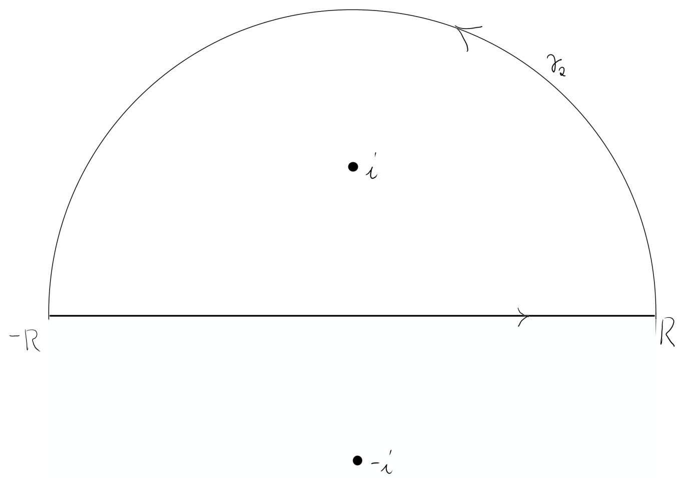

Abbildung 4.5: Residuen

Wie man aus dem Bild erkennen kann (siehe Satz 4.19), ist $\mathrm{Ind}_{-i}(\gamma) = 0$ und $\mathrm{Ind}_i(\gamma) = 1$. Wir müssen also $\mathrm{Res}_i(f(z))$ bestimmen. Da nun f bei i einen Pol erster Ordnung hat, folgt

$$\mathrm{Res}_i(f(z)) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{z-i}{1+z^2} = \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

Damit folgt aus dem Residuensatz

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{[-R,R]}\frac{dz}{1+z^2} + \int_{\gamma_2}\frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i\frac{1}{2i} = \pi.$$

Aus der Standardabschätzung schlussfolgern wir

$$\left|\int_{\gamma_2}\frac{dz}{1+z^2}\right| \le L(\gamma_2)\cdot\sup_{z\in\mathrm{Sp}(\gamma_2)}\frac{1}{|1+z^2|} = R\pi\cdot\sup_{z\in\mathrm{Sp}(\gamma_2)}\frac{1}{|1+z^2|}.$$

Jetzt verwenden wir die „umgekehrte Dreiecksungleichung“ $|a+b|-|b| \le |a|$, und zwar für $a = 1+z^2$ und $b=-1$, dann folgt

$$|z^2|-1 = |(1+z^2)+(-1)| - |-1| \le |1+z^2|,$$

also

$$\frac{1}{|1+z^2|} \le \frac{1}{|z|^2-1}$$

und damit bekommen wir

$$\left|\int_{\gamma_2}\frac{dz}{1+z^2}\right| \le R\pi\cdot\sup_{z\in\mathrm{Sp}(\gamma_2)}\frac{1}{|z|^2-1} = R\pi\cdot\frac{1}{R^2-1} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Somit ist

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2}\frac{dz}{1+z^2} = 0,$$

also bekommen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+z^2}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]}\frac{dz}{1+z^2} = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{[-R,R]}\frac{dz}{1+z^2} + \int_{\gamma_2}\frac{dz}{1+z^2}\right) = \lim_{R\to\infty}\underbrace{\int_\gamma\frac{dz}{1+z^2}}_{=\pi} = \pi.$$

Um Beispiele dieser Art allgemeiner zu studieren, führen wir zunächst eine Notation ein.

Definition 4.22. *Sei $R > 0$ und sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \backslash D_R(0))$. Dann heißt*

$$\operatorname{ord}_\infty(f) := \operatorname{ord}_0(1/f)$$

die Ordnung von f bei Unendlich.

Wir schließen aus Satz 4.3, 4., dass für ein f mit $\operatorname{ord}_\infty(f) = k$ die Abschätzung

$$|f(z)| \leq C \frac{1}{|z|^k}$$

für alle $|z| > R$ gilt, insbesondere haben wir also

$$|f(z)| \leq \frac{C}{R^k}$$

für alle $|z| > R$.
Klar ist, dass für eine rationale Funktion $F = P/Q$ (mit $P, Q \in \mathbb{C}[z]$) gilt, dass $\operatorname{ord}_\infty(F) = \deg(Q) - \deg(P)$ ist. Mit diesen Notation gilt folgende Aussage.

Satz 4.23. *Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine endliche Menge mit $M \cap \mathbb{R} = \emptyset$, und sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \backslash M)$. Sei weiterhin $\operatorname{ord}_\infty(f) \geq 2$. Dann ist*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\Im(z)>0} \operatorname{Res}_z(f) = -2\pi i \sum_{\Im(z)<0} \operatorname{Res}_z(f).$$

Beweis. Wir betrachten den gleichen Integrationsweg $\gamma := \gamma_1\gamma_2$ wie eben, wobei $\operatorname{Sp}(\gamma_1) = [-R, R]$ und $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto R\exp(it)$ ist, und wobei wir R so groß wählen, dass die Menge $M \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ im Inneren des von γ berandeten Gebietes liegt. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_{-R}^{R} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

und wieder folgt mit der Standardabschätzung und der Abschätzung vor dem gerade zu beweisenden Satz, dass

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq R \cdot \pi \cdot \sup_{z \in \operatorname{Sp}(\gamma_2)} |f(z)| \leq \pi R \frac{C}{R^k}$$

gilt. Wegen $k \geq 2$ bekommen wir also

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0.$$

Damit ist wieder

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z) dz = \lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{\Im(z)>0} \operatorname{Res}_z(f),$$

da die Umlaufzahl von γ um alle Singularitäten im Gebiet, welches γ berandet, gleich 1 ist.
Betrachtet man analog den Integrationsweg $\gamma_1\overline{\gamma_2}$, so bekommt man die zweite Formel. □

Als Beispiel betrachte man die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^4}.$$

Es ist dann $P(f) = \{c, c^3, c^5, c^7\}$, wobei $c = \exp(2\pi i/8)) = (1 + i)/\sqrt{2}$ eine primitive 8-te Einheitswurzel ist. Die Ordnung aller Pole ist 1, und wir haben $\Im(c), \Im(c^3) > 0$ und $\Im(c^5), \Im(c^7) < 0$. Damit liefert der letzte Satz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1 + z^4} = 2\pi i(\operatorname{Res}_c(f(z)) + \operatorname{Res}_{c^3}(f(z)))$$

Da die Pole von f alle einfach sind, bekommen wir (unter Verwendung der Regel von de l'Hôpital):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_c\left(\frac{1}{1+z^4}\right) &= \lim_{z\to c}\frac{z-c}{1+z^4} \\
&= \lim_{z\to c}\frac{(z-c)'}{(1+z^4)'} = \lim_{z\to c}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4c^3}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{c^3}\left(\frac{1}{1+z^4}\right) &= \lim_{z\to c^3}\frac{z-c}{1+z^4} \\
&= \lim_{z\to c^3}\frac{(z-c)'}{(1+z^4)'} = \lim_{z\to c^3}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4c^9} = \frac{1}{4c}
\end{aligned}$$

Also bekommen wir

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^4} &= 2\pi i\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c^3}\right) \\
&= \frac{\pi i}{2}(c^7+c^5) = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}+\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\pi i}{2\cdot\sqrt{2}}(-2i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Als nächstes Beispiel betrachten wir Integranden, welche aus einem Produkt einer rationalen und einer Exponentialfunktion bestehen. Genauer haben wir die folgende Aussage.

Satz 4.24. *Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine endliche Menge mit $M \cap \mathbb{R} = \emptyset$, und sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\backslash M)$. Sei weiterhin $\mathrm{ord}_\infty(f) \geq 1$. Dann ist*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\exp(iz)dz = 2\pi i\sum_{\Im(z)>0}\mathrm{Res}_z(f(z)\cdot\exp(iz)).$$

Beweis. Wir betrachten den Integrationsweg (siehe Bild **??**) $\gamma = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, wobei $\mathrm{Sp}(\gamma_1) = [-R,R]$, $\mathrm{Sp}(\gamma_2) = [R, R+iS]$, $\mathrm{Sp}(\gamma_3) = [R+iS, -R+iS]$ und $\mathrm{Sp}(\gamma_4) = [-R+iS, -R]$ ist für $R, S > 0$. Wählt man R und S ausreichend groß, dann liegen alle Singularitäten z von $f(z)\exp(iz)$ mit $\Im(z) > 0$ innerhalb des von γ berandeten Gebietes. Wir zeigen nun, dass für $i \in \{2,3,4\}$ gilt, dass

$$\lim_{R,S\to\infty}\int_{\gamma_i} f(z)\exp(iz) = 0$$

gilt. Wir haben die Parametrisierung

$$\begin{aligned}
\gamma_2 : [0,S] &\longrightarrow [R, R+iS] \\
t &\longmapsto R+it
\end{aligned}$$

also

$$\int_{\gamma_2} f(z)\exp(iz)dz = \int_0^S f(R+it)\exp(iR)i\exp(-t)dt$$

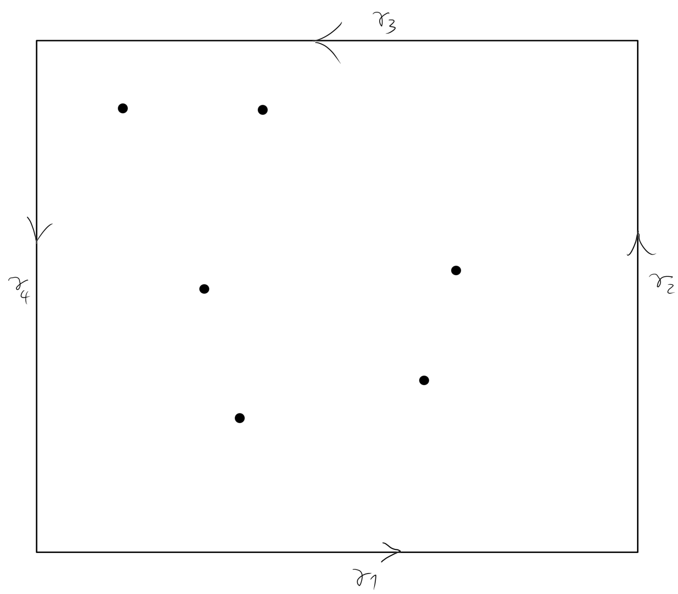

Abbildung 4.6: Residuen

und dann bekommen wir aus Lemma 3.3, 3., dass

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2} f(z)\exp(iz)dz\right| &\leq \int_0^S |f(R+iS)\exp(iR)i\exp(-t)|\,dt \\
&= \int_0^S |f(R+iS)|\exp(-t)dt \\
&\leq \sup_{z\in\mathrm{Sp}(\gamma_2)} |f(z)|\cdot\int_0^S \exp(-t)dt \\
&= [-\exp(-t)]_0^S \sup_{z\in\mathrm{Sp}(\gamma_2)} |f(z)| = (1-\exp(-S))\sup_{z\in\mathrm{Sp}(\gamma_2)} |f(z)| \\
&\leq \sup_{z\in\mathrm{Sp}(\gamma_2)} |f(z)|.
\end{aligned}$$

Mit einer analogen Rechnung erhalten wir wir

$$\left|\int_{\gamma_4} f(z)\exp(iz)dz\right| \leq \sup_{z\in\mathrm{Sp}(\gamma_4)} |f(z)|.$$

Nach Voraussetzung ist $\mathrm{ord}_\infty(f) = 1$, dies impliziert $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$. Damit haben wir

$$\lim_{R,S\to\infty}\int_{\gamma_i} f(z)\exp(iz) = 0$$

für $i = 2, 4$. Wir haben noch $\lim_{R,S\to\infty}\int_{\gamma_3} f(z)\exp(iz) = 0$ zu zeigen. Es sei

$$\begin{aligned}
\gamma_3 : [-R,R] &\longrightarrow \mathbb{C} \\
t &\longmapsto iS - t
\end{aligned}$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_3} f(z)\exp(iz)dz\right| &\le \int_{-R}^{R} |f(iS-t)||\exp(-S-it)|dt \\ &= \int_{-R}^{R} |f(iS-t)|\exp(-S)\underbrace{|\exp(-it)|}_{=1} \\ &\le \sup_{z\in \mathrm{Sp}(\gamma_3)} |f(z)|\cdot 2R\cdot \exp(-S).\end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{ord}_\infty(f)\ge 1$ ist $R\cdot \sup_{z\in\mathrm{Sp}(\gamma_3)}|f(z)|$ beschränkt, und für $S\to\infty$ geht dann der Ausdruck

$$\sup_{z\in \mathrm{Sp}(\gamma_3)} |f(z)|\cdot 2R\cdot \exp(-S)$$

gegen Null. Damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\exp(iz)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)\exp(iz)dz = \lim_{R,S\to\infty}\int_\gamma f(z)\exp(iz)dz = 2\pi i\sum_{\Im(z)>0}\mathrm{Res}_z(f(z)\cdot\exp(iz)).$$

□

Als Beispiel betrachte man das folgende Integral. Sei $a>0$, dann ist

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(z)}{a^2+z^2}dz &= \Re\left(2\pi i\mathrm{Res}_{ia}\frac{\exp(iz)}{a^2+z^2}\right) = \Re\left(2\pi i\lim_{z\mapsto ia}\frac{(z-ia)\exp(iz)}{a^2+z^2}\right) = \Re\left(2\pi i\lim_{z\mapsto ia}\frac{\exp(iz)}{z+ia}\right) \\ &= \Re\left(2\pi i\frac{e^{-a}}{2ia}\right) = \frac{\pi}{a}e^{-a}.\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] Fischer, Wolfgang and Lieb, Ingo, *Funktionentheorie*, Friedr. Vieweg & Sohn, 8. Auflage, (2003).

[2] Remmert, Reinhold and Schumacher, Georg: Funktionentheorie 1, Springer, 5. Auflage, (2001).