Übungsaufgaben zur Algebra

Zur Erinnerung: Im folgenden finden Sie verschiedene Aussagen zur Irreduzibilität von Polynomen:

(a) Satz 3.45: Sei R ein faktorieller Ring und $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ mit $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Sei $p \in R$ ein Primelement mit $p \mid a_j$ für $j = 1, \ldots, n-1$, $p \nmid a_n$, $p^2 \nmid a_0$. Dann ist $f(x)$ irreduzibel in $R[x]$.

(b) Satz 3.44: Die Projektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ (p eine Primzahl) induziert einen Ringhomomorphismus $\pi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{F}_p[x]$. Sei $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Dann gilt: $\pi(f(x))$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_p[x] \Rightarrow f(x)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$.

(c) Korollar 3.42 und Satz 3.43: Sei R ein faktorieller Ring, K sein Quotientenkörper und $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in R[x]$. Dann gilt: $f(x)$ ist irreduzibel in $R[x] \Rightarrow f(x)$ ist irreduzibel in $K[x]$. Diese Implikation ist eine Äquivalenz, wenn zusätzlich f primitiv ist, d.h., wenn $\mathrm{ggT}(a_0, \ldots, a_n) = 1$ gilt.

1. *(6 Punkte)* Beweisen Sie die folgenden zusätzlichen Hilfsaussagen zur Untersuchung der Irreduzibilität:

   (d) Sei R ein Integritätsring und $f \in R[x]$ unitär vom Grad ≥ 2. Dann gilt:
   $$f(x) \text{ ist irreduzibel in } R[x] \Rightarrow f(x) \text{ hat keine Nullstelle in } R.$$
   Für $\deg f \in \{2, 3\}$ gilt auch $\Leftarrow$.

   (e) Hat $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ eine Nullstelle $b \in \mathbb{Z}$, so ist b ein Teiler von a_0.

   (f) Sei R ein Integritätsring, $f \in R[x]$ und $a \in R$ beliebig. Dann gilt:
   $$f(x) \text{ ist irreduzibel in } R[x] \iff f(x+a) \text{ ist irreduzibel in } R[x].$$

2. *(6 Punkte)* Für $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gibt es 2^m unitäre Polynome vom Grad m im Polynomring $\mathbb{F}_2[x]$. Listen Sie alle $30 = 2 + 4 + 8 + 16$ unitären Polynome in $\mathbb{F}_2[x]$ vom Grad $d \in \{1, 2, 3, 4\}$ und ihre Produkt-Zerlegungen in irreduzible unitäre Polynome auf.

3. *(8 Punkte)* Zeigen Sie, dass die folgenden 8 Polynome irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$ sind. Sie dürfen Aussagen (a)-(f) sowie Aufgabe 2 benutzen.

   (1) $x^2 - x + 1$,
   (2) $x^3 + 10x^2 + 9x - 15$,
   (3) $x^3 + 3x^2 - x - 1$,
   (4) $x^3 + 12x^2 + 24x + 48$,
   (5) $7x^3 - 8x^2 + 17x - 135$,
   (6) $3x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 5x + 15$,
   (7) $x^6 + 17$,
   (8) $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 18$.

Abgabe bis Mittwoch, den 13. Juni 2018, in der Übung