Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(6 Punkte)*

   (a) Zeigen Sie *mit dem Euklidischen Algorithmus*, dass für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:
   $$\exists\, x, y \in \mathbb{Z}: \quad \mathrm{ggT}(a,b) = xa + yb.$$

   (b) Folgern Sie daraus
   $$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = \{[a] \,|\, 0 < a < m,\ \mathrm{ggT}(a,m) = 1\}.$$

   (c) Listen Sie in den beiden Fällen $m = 15$ und $m = 28$ jeweils die Elemente von $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ und ihre Inversen auf (am besten in Tabellen mit den Inversen der Elemente unter den Elementen).

2. *(6 Punkte)*
   Ein unitärer kommutativer Ring R heißt *lokal*, wenn er ein einziges maximales Ideal besitzt. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgende Charakterisierung lokaler Ringe zu beweisen:
   $$R \text{ ist genau dann lokal, wenn die Menge } NU := R \setminus R^* \text{ ein Ideal in } R \text{ ist.} \tag{1}$$

   (a) Es folgt aus dem sogenannten *Lemma von Zorn*, dass jedes echtes Ideal von R in einem maximalen Ideal enthalten ist. Folgern Sie aus dieser Tatsache, dass
   $$NU = \bigcup_{\mathbf{m} \text{ ist max. Ideal in } R} \mathbf{m}$$
   ist.

   (b) Zeigen Sie mittels (a) die Implikation $\Rightarrow$ in (1).

   (c) Beweisen Sie: Ist NU ein Ideal, so ist es maximal.

   (d) Leiten Sie aus (c) ab, dass es keine weitere maximale Ideale in R gibt. Daher gilt auch die Implikation $\Leftarrow$ in (1).

3. *(8 Punkte)*

   (a) Show that if R is local with the maximal ideal $\mathbf{m}$, then for any $x \in \mathbf{m}$ the element $1 + x$ is a unit in R.

   (b) Let R be a local ring and $I \subset R$ any ideal. Show that the factor ring R/I is also local.

   (c) Let K be a field and $K[[x_1, \ldots, x_n]]$ be the ring of formal power series over K. Show that it is a local ring and determine its maximal ideal $\mathbf{m}$. Show that the polynomial ring $K[x_1, \ldots, x_n]$ is not local.

   (d) Let R be a ring and $\mathfrak{p} \subset R$ a prime ideal. Show that the ring $R_{\mathfrak{p}}$ (i.e., the localization $S^{-1}R$ with $S := R \setminus \mathfrak{p}$) is local, and describe its maximal ideal.

Abgabe bis Mittwoch, den 6. Juni 2018, in der Übung