Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(4 Punkte)* Beweisen Sie Satz 3.17. aus der Vorlesung.

2. *(4 Punkte)* Im Ring $\mathbb{R}[x]$ ist die Menge $J := \mathbb{R}[x] \cdot (x^3 + x)$ ein Ideal, und der Quotient $R := \mathbb{R}[x]/J$ ist ein kommutativer Ring mit Eins. $\mathbb{R}[x]$ und J sind auch $\mathbb{R}$-Vektorräume. Daher ist der Quotient R auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

   (a) Zeigen Sie: R hat als $\mathbb{R}$-Vektorraum die Dimension 3, und $[1], [x], [x^2]$ ist eine Basis. Geben Sie die Multiplikationstabelle für diese Basis an. Produkte von Basiselementen sollen natürlich als Linearkombinationen der Basiselemente geschrieben werden.

   (b) Geben Sie zwei Elemente $a, b \in R \backslash \{0\}$ an, die $a \cdot b = 0$ erfüllen. (Daher ist R kein Körper.)

   (c) Nach Aufgabe 1 (Satz 3.17 der Vorlesung) hat man kanonische Bijektionen zwischen den Mengen

   $$\{\widetilde{I} \subset R \mid \widetilde{I} \text{ ist ein Ideal}\} \qquad \text{und} \qquad \{I \subset \mathbb{R}[x] \mid I \text{ ist ein Ideal und } J \subset I\}.$$

   Weil R kein Körper ist (siehe (b)), hat nach Satz 3.19 der Vorlesung die linke Menge mehr als nur die zwei Elemente $\{0\}$ und R. Finden Sie (mit Beweis) je vier Elemente in beiden Mengen. (Ohne Beweis: die beiden Mengen haben nur je vier Elemente.)

   (d) Zeigen Sie, daß für $a \in \mathbb{R}$ gilt: $(x^3 + x, x + a) = \mathbb{R}[x] \iff a \neq 0$.

3. *(4 Punkte)* Sei R ein Integritätsring. Wir betrachten den durch $\phi\colon \mathbb{Z} \to R,\ 1_{\mathbb{Z}} \mapsto 1_R$ definierten Ringhomomorphismus. Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist, gibt es ein $p \in \mathbb{N}$ mit $(p) = \ker(\phi)$. Die Zahl p heißt *Charakteristik* von R, in Zeichen $\mathrm{char}(R) = p$. Zeigen Sie :

   (a) p ist entweder 0 oder eine Primzahl.

   (b) Die *Frobeniusabbildung*

   $$F\colon R \to R,\ x \mapsto x^p$$

   ist ein Ringhomomorphismus, falls die Charakteristik $p > 0$ ist.

   (c) Gibt es Homomorphismen zwischen Integritätsringen unterschiedlicher Charakteristik ?

   (d) Gibt es Homomorphismen zwischen Körpern unterschiedlicher Charakteristik ?

4. *(4 Punkte)* Let $\phi : R \to S$ be a homomorphism of rings and let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal of S.

   (a) Show that $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ is a prime ideal of R.

   (b) Give an example of $\phi : R \to S$ and a maximal ideal $\mathfrak{p}$ of S such that $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ is not maximal.

Abgabe bis Mittwoch, den 30. Mai 2018, in der Übung