Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik
Christian Sevenheck, Dmytro Shklyarov

Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(2 Punkte)* Es sei G eine Gruppe, X, Y Mengen mit Gruppenoperationen $G \times X \to X$ und $G \times Y \to Y$. Zeigen Sie, dass

$$G \times \mathrm{Abb}(X,Y) \to \mathrm{Abb}(X,Y),\ (g,f) \mapsto (x \mapsto g \cdot f(g^{-1} \cdot x))$$

eine Operation von G auf $\mathrm{Abb}(X,Y)$ definiert.

2. *(6 Punkte)*

   (a) Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 40 und jede Gruppe der Ordnung 30 einen nichttrivialen (d.h. $\neq \{e\}$ und $\neq G$) Normalteiler besitzt.

   (b) Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung p^2q einen nichttrivialen Normalteiler besitzt.

Hinweis: Wenden Sie auf ähnliche Weise wie im folgenden Beispiel die Sylowsätze an.

G sei eine Gruppe der Ordnung $|G| = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Der dritte Sylowsatz gibt (mit s_p wird die Anzahl der p-Sylowgruppen von G bezeichnet):

$$\begin{aligned} s_3 &\equiv 1 \mod 3,\ s_3|35,\ \Rightarrow s_3 \in \{1,7\}, \\ s_5 &\equiv 1 \mod 5,\ s_5|21,\ \Rightarrow s_5 \in \{1,21\}, \\ s_7 &\equiv 1 \mod 7,\ s_7|15,\ \Rightarrow s_7 \in \{1,15\}. \end{aligned}$$

Behauptung: Tatsächlich ist mindestens eine der 3 Zahlen s_3, s_5, s_7 gleich 1.

Annahme: $s_3 = 7, s_5 = 21$ und $s_7 = 15$. Die 7 zyklischen Untergruppen der Ordnung 3 sind bis auf das Einselement paarweise disjunkt (warum?). Also gibt es in G $7 \cdot 2 = 14$ Elemente der Ordnung 3. Analog schließt man, dass es in G $21 \cdot 4 = 84$ Elemente der Ordnung 5 und $15 \cdot 6 = 90$ Elemente der Ordnung 7 gibt. Aber $1 + 14 + 84 + 90 > 105$, Widerspruch. Also ist die Annahme falsch.

Also hat man zu mindestens einer der Ordnungen 3 oder 5 oder 7 nur eine Untergruppe. Die muss ein Normalteiler sein, da sie die einzige Gruppe ihrer Ordnung ist. Also hat die Gruppe G einen nichttrivialen Normalteiler.

3. *(6 Punkte)*

   (a) Sei p eine Primzahl. Listen Sie alle Untergruppen der Diedergruppe D_p (Definition in Blatt 2, Aufgabe 3) auf. Notieren Sie, welche zueinander konjugiert sind und welche Normalteiler sind. Im Falle eines Normalteilers geben Sie die Isomorphieklasse der Quotientengruppe an.

   (b) Sei $U \subset G$ eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G mit $|G/U| = 2$. Ist U ein Normalteiler? Beweis oder Gegenbeispiel.

   (c) Sei $U \subset G$ eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G mit $|G/U| = 3$. Ist U ein Normalteiler? Beweis oder Gegenbeispiel.

Abgabe bis Mittwoch, den 2. Mai 2018, in der Übung