Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(2 Punkte)* Laut Aufgabe 2 von Blatt 9 sind die beiden Polynome
$$f_1(x) = x^3 + x + 1 \quad \text{und} \quad f_2(x) = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$$
irreduzibel in $\mathbb{F}_2[x]$. Daher sind die Quotientenringe
$$K_1 := \frac{\mathbb{F}_2[x]}{(f_1(x))} \quad \text{und} \quad K_2 := \frac{\mathbb{F}_2[x]}{(f_2(x))}$$
Körper. Finden Sie einen Körperisomorphismus $\varphi : K_1 \to K_2$ und beweisen Sie, dass er einer ist.

2. *(4 Punkte)*
   (a) Zeigen Sie: Ist $K \supset \mathbb{Q}$ ein Körper und $\psi : K \to K$ ein Körperautomorphismus, so ist $\psi|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}$.
   (b) Zeigen Sie, dass die Identität der einzige Körperautomorphismus von $\mathbb{R}$ ist.
   Hinweis: Benutzen Sie (a) und die Aussage:
$$a < b \iff b - a > 0 \iff b - a \text{ ist ein Quadrat einer reellen Zahl.}$$

3. *(3 Punkte)* Finden Sie für die über $\mathbb{Q}$ algebraischen Zahlen
$$\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad \beta := \sqrt{2} \cdot e^{2\pi i/3} \quad \text{und} \quad \gamma := 5^{1/3} + 5^{2/3}$$
unitäre Polynome in $\mathbb{Q}[x]$ der Grade 4, 4 und 3, die α bzw. β bzw. γ als Nullstelle haben.

4. *(2 Punkte)* Let $L \supset K$ be a finite field extension. Suppose that its degree $[L : K]$ is a prime number. Show that there is an element $\alpha \in L$ such that $L = K(\alpha)$.

5. *(6 points)* Show the equality of algebraic field extensions of $\mathbb{Q}$:
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}).$$

6. *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass ein algebraischer Abschluss $\overline{K}$ eines Körpers K stets unendlich viele Elemente besitzt.

Abgabe bis Mittwoch, den 27. Juni 2018, in der Übung