Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(6 Punkte)* Sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler $K-$Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. V ist ein $K[t]$-Modul mit
$$p(t).v := p(f)(v) \quad \text{für } p(t) \in K[t],\ v \in V.$$

   Erinnerung:

   (α) Das Minimalpolynom $p_{min}(t)$ von f ist das unitäre Erzeugende des Ideals $\{p(t) \in K[t] \mid p(f) = 0\}$.

   (β) $p_{min}(t)$ teilt das charakteristische Polynom $p_{ch}(t)$ von f (Satz von Cayley-Hamilton).

   Benutzen Sie diese Aussagen zum Lösen der folgenden Aufgaben.

   (a) Zeigen Sie die Äquivalenz von (i) und (ii):
      (i) Es gibt ein unitäres Polynom $g(t) \in K[t]$ mit $V \cong K[t]/(g(t))$ als $K[t]$-Modul.
      (ii) Es gibt ein zyklisches Erzeugendes $v_1 \in V$ von V, d.h. $v_1 \in V$ erfüllt $V = \bigoplus_{i=1}^{n} K \cdot f^{i-1}(v_1)$.

   (b) Zeigen Sie, dass für die Endomorphismen, die (i), (ii) erfüllen, gilt: $g(t) = p_{min}(t) = p_{ch}(t)$.

   (c) Nun sei $K = \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $p_{ch}(t) = (t - \lambda)^n$, und (i) und (ii) sollen gelten. Geben Sie (mit Beweis) eine Basis von V an, so dass die Matrix von f zu dieser Basis ein einziger Jordanblock mit Eigenwert λ ist.

2. *(6 Punkte)* Let V be an n-dimensional vector space over $\mathbb{C}$ and $f : V \to V$ an endomorphism. Show that there is a basis of V such that the matrix representing f in this basis has Jordan normal form.

   Hint: Use Exercise 1, the Chinese remainder theorem and the structure theorem for finitely generated modules over principal ideal domains.

3. *(4 Punkte)*

   (a) Formen Sie mit elementaren Spalten- und Zeilenumformungen (mit ganzzahligen Koeffizienten) die folgenden Matrizen A_i, $i = 1, ..., 5$, mit Spalten der Längen $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$ um in die Gestalt
$$\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & \ddots & & \text{evtl } 0 \\ & & b_{n_i} & \end{pmatrix}$$
   mit $b_j | b_{j+1}$ (und evtl. $b_j = 0$ für große j). Mit anderen Worten: führen Sie den Elementarteileralgorithmus durch.
$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 12 & 18 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Die Spalten der Matrix A_i erzeugen einen $\mathbb{Z}$-Untermodul $U_i \subset \mathbb{Z}^{n_i}$. Geben Sie einen zum Quotientenmodul $\mathbb{Z}^{n_i}/U_i$ isomorphen $\mathbb{Z}$-Modul an.

Abgabe bis Mittwoch, den 20. Juni 2018, in der Übung