Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik
Christian Sevenheck, Dmytro Shklyarov

Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(2+2 Punkte)*

   (a) Zeigen Sie, dass die zehnte Einheitswurzel $\zeta := e^{\pi i/5}$ die Gleichung $\zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1 = 0$ erfüllt. Leiten Sie daraus eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$ ab, die von $\cos\frac{\pi}{5}$ erfüllt wird. Rechnen Sie damit $\cos\frac{\pi}{5}$ aus.

   (b) Finden Sie in ähnlicher Weise eine kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$, die von $\cos\frac{2\pi}{7}$ erfüllt wird (hier müssen Sie $\cos\frac{2\pi}{7}$ nicht ausrechnen).

2. *(3+3 Punkte)* Beweisen Sie Definition-Lemma 1.9 (2) im Skript: Sei $x^3+px+q \in \mathbb{C}[x]$ ein kubisches Polynom mit Nullstellen y_0, y_1, y_2. Dann gilt:

   (a) $\sqrt{D} = -\frac{\sqrt{3}}{18} \cdot \sqrt{-1} \cdot (y_0 - y_1)(y_0 - y_2)(y_1 - y_2)$, wobei $D := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ (die Diskriminante).

   (b) Sind die $p, q \in \mathbb{R}$ und alle y_i verschieden, so gilt:
   $D > 0 \iff$ eine Nullstelle ist reell, die anderen sind komplex konjugiert,
   $D < 0 \iff$ alle drei Nullstellen sind reell.

3. *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass genau eine der drei Lösungen der Gleichung $x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$ reell ist. Berechnen Sie diese Lösung mit den Cardanoschen Formeln.

Hinweise

Begleitend zur Vorlesung wird es jede Woche ein Übungsblatt geben. Dieses soll bis zur nächsten Woche selbständig bearbeitet werden. Die Bearbeitung der Übungen ist integraler Bestandteil der Vorlesung und zum Bestehen der Prüfung unerläßlich. Einmal pro Woche werden die Aufgaben in der Übung besprochen.
Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/Algebra-SS18/Algebra.php`

zu finden.

Abgabe am Mittwoch, den 18. April 2018, in der Übung