

Übungsaufgaben zu „Algebra und diskrete Strukturen“ für Grundschullehramt

1. (4 Punkte)

- (a) Hat i eine Quadratwurzel in \mathbb{C} ? Wenn ja, bestimmen Sie diese.
- (b) Bestimmen Sie einmal in den reellen und einmal in den komplexen Zahlen alle Lösungen der Gleichung $x^3 - 1 = 0$.
- (c) Zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass die dritte Einheitswurzel $\zeta = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{3})$ der Gleichung $z^2 + z + 1 = 0$ genügt.

2. (4 Punkte)

- (a) Sei nun $\zeta = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{5})$. Zeigen Sie (geometrisch oder durch Polynomdivision), daß die Zahlen ζ, ζ^2, ζ^3 und ζ^4 alle Lösungen der Gleichung $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ sind.
- (b) Teilen Sie diese Gleichung durch z^2 und führen Sie sie mit der Substitution $u = z + \frac{1}{z}$ auf eine quadratische Gleichung zurück. Lösen Sie diese Gleichung und bestimmen Sie daraus Ausdrücke für die fünften Einheitswurzeln.

3. (4 Punkte) Was können Sie über die Lösbarkeit und die Lösungen der folgenden Gleichungen in \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} aussagen ?

- (a) $x^2 + 50000x + 25000 = 0$,
- (b) $x^2 - 2x + 1 = 0$,
- (c) $x^2 + e^{30000}x + 8 \cdot (e^{30000})^2 = 0$,
- (d) $x^2 + 0,12345678901234567890 \dots \cdot x + 0,12345678901234567890 \dots = 0$.¹

4. (4 Punkte) Versuchen Sie die reellen Lösungen der Gleichung

$$z^3 + 6z = 20$$

mit Hilfe der Cardanischen Formeln zu finden. Dabei stoßen Sie auf einen komplizierten Wurzelausdruck². Andererseits ist offenbar $z = 2$ auch eine Lösung der Gleichung. Teilen Sie die Gleichung durch $z - 2$ und berechnen Sie die beiden verbleibenden Lösungen.

Bitte wenden !

¹Sie dürfen folgendes benutzen: Ist $a \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < 1$, dann gilt $0 < a^2 < a$.

²Wenn man weiß, daß $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} = 1 + \sqrt{3}$ ist, läßt sich der Wurzelausdruck sogar leicht vereinfachen. Aber wieso gilt diese Identität ? Dies ist allerdings nicht Teil der Aufgabe, aber vielleicht finden Sie ja eine Lösung für dieses Problem.

5. (*Zusatzaufgabe*) Du bist auf einer Insel mit ziemlich sonderbaren Menschen gelandet. Ein Teil der Bewohner, die sog. Aufrichtigen, sprechen stets die Wahrheit. Ein anderer Teil, die Verworfenen, lügen immer. Und dann gibt es noch die Wechselbälger, welche immer abwechselnd die Wahrheit sagen bzw. lügen. Du lauscht während deines dortigen Aufenthalts folgenden drei Gesprächen und versuchst herauszufinden, um welche Charaktere es sich jeweils handelt.

(1. Gespräch)

- Person A : „Einer von uns beiden ist ein Aufrichtiger.“
- Person B : „Einer von uns beiden ist verworfen.“
- Person A : „Du sprichst wahre Worte.“

(2. Gespräch)

- Person N : „Ich bin ja so ein Wechselbalg.“
- Person M : „Genau eine der ersten beiden Aussagen ist wahr.“
- Person N : „Genau eine der ersten drei Aussagen ist wahr.“
- Person M : „Mindestens drei unserer vier Aussagen sind falsch.“

(3. Gespräch; hier kommt jede Gruppe von Bewohnern vor.)

- Person X : „Y ist der Aufrichtige.“
- Person Y : „Z ist der Wechselbalg.“
- Person Z : „X ist ja sowas von verworfen.“

Hinweise zu Übungen

Bitte geben Sie die Übungen in Zweiergruppen ab und bitte vermerken Sie auf jedem Blatt Ihrer Abgabe ihre Namen.

Bei weiteren Fragen zur Vorlesung (Stoff, Übungen, Organisatorisches etc.) können Sie uns jederzeit per email unter christian.sevenheck@mathematik.tu-chemnitz.de bzw. fgoering@mathematik.tu-chemnitz.de erreichen. Nach Terminvereinbarung sind wir natürlich auch persönlich zu sprechen.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

<https://www-user.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/AlgLehramt-WS1819/AlgLehramt.php>

zu finden.

Abgabe bis Dienstag, den 13. November 2018, in der Übung