Übungsaufgaben zu „Algebra und diskrete Strukturen für Grundschullehramt“

1. *(5 Punkte)* Laut Vorlesung können wir jedes Element x aus $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ schreiben als $x = a + b \cdot \sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$. Schreiben Sie die folgenden Zahlen in dieser Form :

   (a) $(1 + \sqrt{2}) \cdot (2 - \sqrt{2})$,

   (b) $(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2}) - (\frac{5}{6} + \frac{7}{8}\sqrt{2})$,

   (c) $\frac{9}{10+11\sqrt{2}}$,

   (d) $\frac{9-8}{3-2\sqrt{2}}$.

   (e) Sind $\sqrt{8}, \sqrt{\frac{1}{2}}, -7 + \frac{3}{4}\sqrt{12}$ Elemente von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$? Begründen Sie ihre Antwort.

2. *(3 Punkte)* (Zum Verfahren von Theon von Smyrna)

   (a) Ist $\frac{16}{11}$ größer oder kleiner als $\sqrt{2}$? Bitte begründen Sie Ihre Antwort ohne Verwendung der Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$.

   (b) Es seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie :

   $$\frac{a}{b} < \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{a+2b}{a+b} > \sqrt{2}.$$ [1]

   (c) Wie können Sie feststellen, ob für zwei natürliche Zahlen a, b gilt : $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$?

3. *(4 Punkte)* Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Wir bezeichnen wie üblich mit 0 das neutrale Element der Addition und mit 1 das neutrale Element der Multiplikation in $\mathbb{K}$. Sei $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ eine nicht leere Teilmenge, so daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind :

   (E0) $0, 1 \in \mathbb{F}$,

   (E1) $\forall a, b \in \mathbb{F}\colon a + b \in \mathbb{F}$,

   (E2) $\forall a \in \mathbb{F}\colon -a \in \mathbb{F}$,

   (E3) $\forall a, b \in \mathbb{F}\colon a \cdot b \in \mathbb{F}$ und

   (E4) $\forall a \in \mathbb{F}\backslash\{0\}\colon a^{-1} \in \mathbb{F}$.

   Zeigen Sie: $\mathbb{F}$ ist ein Körper.

   Zusatzfrage : Gilt dies auch, wenn wir die Eigenschaft (E0) nicht explizit fordern ?

4. *(4 Punkte)* Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeigen Sie, daß die folgenden Rechenregeln in $\mathbb{K}$ gelten (d.h., leiten Sie diese Aussagen aus den Körperaxiomen A1-A4, M1-M4 sowie D her):

   (a) Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ mit $b, d \neq 0$ gilt :

   $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

   (b) Für alle $x, y \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ gilt :

   $$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}.$$

---

[1] Sie dürfen die folgenden Aussagen benutzen: Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ gilt:

i. $a > b$ und $c > 0 \Longleftrightarrow a \cdot c > b \cdot c$

ii. $a > b > 0 \Longleftrightarrow a^2 > b^2$

iii. $a > b \Longleftrightarrow a + c > b + c$. Dies gilt sogar für alle $c \in \mathbb{Z}$.

5. *(Zusatzaufgabe)* Masha fehlen 7 Kopeken um sich ihr erstes Malbuch zu kaufen, Misha fehlt eine Kopeke um sich das Buch zu kaufen. Sie legen ihr Geld zusammen, doch ihr Geld reicht immer noch nicht. Wieviel kostet das Buch ?

Hinweise zu Übungen

Bitte geben Sie die Übungen in Zweiergruppen ab und bitte vermerken Sie auf jedem Blatt Ihrer Abgabe ihre Namen.

Bei weiteren Fragen zur Vorlesung (Stoff, übungen, Organisatorisches etc.) können Sie uns jederzeit per email unter **christian.sevenheck@mathematik.tu-chemnitz.de** bzw. **frank.goering@mathematik.tu-chemnitz.de** erreichen. Nach Terminvereinbarung sind wir natürlich auch persönlich zu sprechen.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www-user.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/AlgLehramt-WS1819/AlgLehramt.php`

zu finden.

Abgabe bis Dienstag, den 30. Oktober 2018, in der Übung