Übungsaufgaben zu „Algebra und diskrete Strukturen für Grundschullehramt“

1. *(4 Punkte)*
   (a) Welche der Abbildungen ist surjektiv, injektiv oder bijektiv ?
      i. $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin(x)$,
      ii. $\cos\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x)$,

      Begründen Sie ihre Antwort.

   (b) Es seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Abbildungen von Mengen, dann definiert $a \mapsto g(f(a))$ eine Abbildung $g \circ f\colon A \to C$. Zeigen Sie :
      i. Sind f, g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.
      ii. Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

2. $(*)$*(5 Punkte)* Sei K ein Körper. Beweisen Sie die Faustregel „Minus mal Minus ist Plus“ in den folgenden Schritten. Geben Sie bei jedem Beweisschritt das Axiom oder die bereits bewiesene Aussage an, die verwendet wurde.
   (a) sind $a, b, b' \in K$ mit $a + b = b + a = 0 = a + b' = b' + a$, dann gilt $b = b'$.
   (Diese Aussage rechtfertigt es erst, dass man das Negative eines Elementes $a \in K$ mit $-a$ bezeichnet.)
   (b) Schließen Sie, daß für alle $a \in K$ gilt : $-(-a) = a$.
   (c) Zeigen Sie, daß für alle $a \in K$ gilt : $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.
   (d) Zeigen Sie, daß für alle $a, b \in K$ die Gleichung $-(ab) = (-a)b$ erfüllt ist.
   (e) Formulieren Sie die „Faustregel“ als mathematische Aussage und beweisen Sie sie.

3. *(4 Punkte)* Sei K ein Körper. Schreiben Sie folgende Aussagen als ausformulierte Sätze auf und zeigen Sie mit Hilfe der Körperaxiome, daß es sich um wahre Aussagen handelt:
   (a) $\forall\ a, b \in K : \exists\ c \in K : a + c = b$.
   (b) $\forall\ a, b \in K,\ a \neq 0 : \exists\ c \in K : a \cdot c = b$.

4. *(3 Punkte)* Zeigen Sie, daß $\sqrt{3}$ keine rationale Zahl ist.
   Hinweis : Sie dürfen die folgende Aussage benutzen : Eine ganze Zahl n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn n^2 durch 3 teilbar ist.

Bitte wenden !!!

5. $(*)$*(Zusatzaufgabe)*

Die folgende Aufgabe ist ein Gedankenexperiment zur Mächtigkeit von unendlichen Mengen. Sie trägt den Titel „Hilberts Hotel“, weil sie von dem Mathematiker David Hilbert (1862-1943) erdacht wurde.

Ein gewöhnliches Hotel mit endlich vielen Zimmern kann natürlich keine neuen Gäste aufnehmen, wenn alle Zimmer belegt sind. Hilberts Hotel ist nun ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern, und wir werden sehen, dass dann interessante Effekte auftreten können. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass alle Zimmer Einzelzimmer sind. Das Hotel soll voll belegt sein, d.h., jedes Zimmer ist genau mit einem Gast belegt.

(a) Wie können Sie einen weiteren Gast im Hotel unterbringen ? (Hinweis: Sie müssen die schon untergebrachten Gäste in geeigneter Weise verschieben, d.h., jeden Gast in einem anderen Zimmer unterbringen, und so Platz für den neu ankommenden Gast schaffen.)

(b) Wie können Sie 11 weitere Gäste im Hotel unterbringen ?

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie können Sie n weitere Gäste unterbringen ?

(d) Wie können Sie $\mathbb{N}$ weitere Gäste unterbringen ?

(e) Nehmen wir an, das Hotel sei zunächst leer und die Gäste kommen mit Bussen an. Angenommen in **jedem** Bus sind wieder unendlich viele Hotelgäste. Können Sie auch alle Gäste unterbringen, falls sogar unendlich viele solche Bussen ankommen?

Hinweise zu Übungen und Prüfungen

Bitte geben Sie die Übungen in Zweiergruppen ab und bitte vermerken Sie auf jedem Blatt Ihrer Abgabe ihre Namen.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/AlgLehramt-WS1819/AlgLehramt.php`

zu finden.

Abgabe am Mittwoch, den 28. Oktober 2015, in der Übung.