Universität Mannheim
Lehrstuhl für Mathematik VI

Christian Sevenheck
07.03.2007

Projektiver Raum

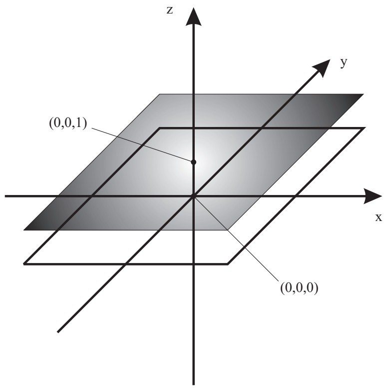
Wir wollen mit dem projektiven Raum eine Erweiterung der bekannten ebenen Geometrie derart konstruieren, dass sich lineare Unterräume ausreichend großer Dimension (z.B. zwei Geraden in der Ebene) *immer* schneiden, d.h., so dass es keine Fallunterscheidungen der Art: zwei Geraden sind parallel / nicht parallel mehr gibt.

1. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper k. Dann führen wir auf der Menge $V \setminus \{0\}$ die folgende Relation ein: Zwei $v, w \in V$ heißen äquivalent, geschrieben $v \sim w$, falls es ein Element $\lambda \in k \setminus \{0\}$ gibt, so dass $\lambda v = w$ ist. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Bezeichne mit $\widehat{\mathbb{P}}(V)$ die Menge der Äquivalenzklassen von V bezüglich $\sim$. Dann existiert die kanonische Restklassenprojektion
$$\pi : V \setminus \{0\} \longrightarrow \widehat{\mathbb{P}}(V)$$
welche einem Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ seien Äquivalenzklasse zuordnet.

2. Sei V genauso wie in a). Dann sei
$$\widetilde{\mathbb{P}}(V) := \{U \subset V \mid \dim(U) = 1\}$$
die Menge aller eindimensionalen Untervektorräume von V. Zeige dass es eine Bijektion zwischen den Mengen $\widetilde{\mathbb{P}}(V)$ und $\widehat{\mathbb{P}}(V)$ gibt, die wir deshalb einheitlich mit $\mathbb{P}(V)$ bezeichnen können. $\mathbb{P}(V)$ heißt der projektive Raum von V.

3. Wähle nun speziell $V = k^n$ als Vektorraum über k. Wir bezeichnen mit $\mathbb{P}^n_k$ den projektiven Raum $\mathbb{P}(k^{n+1})$. Man nennt $\mathbb{P}^n_k$ den *n-dimensionalen projektiven Raum über k*. Wir führen auf $\mathbb{P}^n_k$ die folgenden Koordinaten ein: Ein Element $p \in \mathbb{P}^n_k$ ist nach a) eine Äquivalenzklasse von Punkten aus $k^{n+1} \setminus \{0\}$, sei $x = (x_0, \ldots, x_n)$ ein Vertreter (d.h. ein Element) dieser Klasse. Dann schreibt man den Punkt p als $p = (x_0 : \ldots : x_n)$, dies sind die *homogenen* Koordinaten von p. Diese sind also nur bis auf Multiplikation mit einem von Null verschiedenen Skalar definiert. Entscheide bei den folgenden Gleichheiten (welche in $\mathbb{P}^n_k$ gelten sollen), ob sie richtig oder falsch sind (mit Begründung).
   (a) $(1 : 2 : 3) = (3 : 6 : 9) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$
   (b) $(1 : 0) = (0 : 1) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$
   (c) $(1 : 2 : 3) = (2 : 3 : 4) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$
   (d) $(2 : 10 : 4) = (0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

4. Betrachte die injektive lineare Abbildung
$$\begin{array}{rcl} j : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y, 1) \end{array}$$
Stellt man sich $\mathbb{R}^2$ als Ebene und $\mathbb{R}^3$ als uns umgebenden Raum vor, so ist das Bild dieser Abbildung die rechts grau dargestellte Ebene. Sei jetzt $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ die Komposition von j mit der kanonischen Abbildung π, also $i = \pi \circ j$. Zeige, dass i injektiv, aber nicht surjektiv ist.



5. Die folgenden Mengen U und V sind Teilmengen von $\mathbb{R}^3$. Beschreibe (möglichst geometrisch) die Mengen $\pi^{-1}(\pi(U))$ und $\pi^{-1}(\pi(V))$, wobei π die kanonische Abbildung $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ ist.

   (a) $U := \big\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2a + 3b = 5\,;\, c = 1\big\}$

   (b) $V := \big\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a^2 + b^2 = 9\,;\, c = 1\big\}$

6. Sei L eine projektive Gerade in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Zeige, dass das Urbild $i^{-1}(L)$ entweder leer oder eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ ist.

7. Zeige, dass es für jede Gerade $l \subset \mathbb{R}^2$ genau eine projektive Gerade $l^{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ gibt, so dass $i^{-1}(l^{\mathbb{P}}) = l$ ist. Finde einen Punkt (dieser heißt unendlich ferner Punkt) $p \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, so dass $p \in l^{\mathbb{P}} \setminus i(l)$ gilt.

8. Sei $V \subset k^n$ ein zweidimensionaler affiner Unterraum von k^n (d.h., $V = W + w \subset k^n$ wobei W ein Untervektorraum der Dimension zwei und $w \in k^n$ beliebig ist). Dann nennen wir das Bild $\pi(V)$ unter der kanonischen Projektion π eine *projektive Gerade* in $\mathbb{P}^n$. Zeige, dass zwei projektive Geraden in $\mathbb{P}^2$ immer einen Schnittpunkt besitzen.

9. Betrachte die beiden Paare von Geraden g_1, g_2 und h_1, h_2 aus $\mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\begin{aligned} g_1 &= \{(a, b) \,|\, 2a + 3b = 5\} \\ g_2 &= \{(a, b) \,|\, 4a + 5b = 10\} \\ h_1 &= \{(a, b) \,|\, 3a + 5b = 2\} \\ h_2 &= \{(a, b) \,|\, 9a + 15b = 4\} \end{aligned}$$

   Bestimme (auch geometrisch) $g_1^{\mathbb{P}} \cap g_2^{\mathbb{P}}$ und $h_1^{\mathbb{P}} \cap h_2^{\mathbb{P}}$.