

2 Einführung in die Welt der Knoten

Definitionen und Beispiele

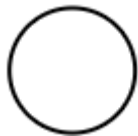
Definition 1

Ein Knoten ist eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^3$, die zur Einheitskreislinie S^1 homöomorph ist; d.h. es existiert eine bijektive Abbildung $f : S^1 \rightarrow K$, so daß f und f^{-1} stetig sind.

(S^1 und K haben dabei die Topologie / Metrik des umgebenden Euklidischen Raumes)

Knoten kann man durch ihre **Projektion** in die Ebene (d.h. \mathbb{R}^2) darstellen:

Beispiele:



sog. trivialer Knoten oder Unknoten
(engl.: unknot)



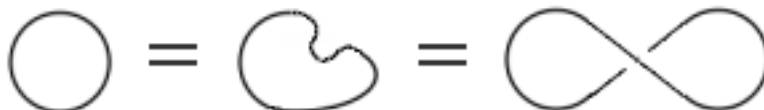
Kleeblattschlinge
(engl.: trefoil knot)




Achterknoten
(engl.: figure-eight-knot)

Knotenprojektionen sind nicht eindeutig!

Beispiel:



Eine Knotenprojektion enthält:

- Stränge = zusammenhängende Komponente
- Kreuzungen = 
(durchgehender Strang liegt oberhalb)

Uns interessiert, ob zwei Knoten in Wirklichkeit 'der gleiche Knoten' sind. Dies präzisiert man wie folgt:

Definition 2

Seien \mathcal{X} und \mathcal{Y} topologische (metrische) Räume, $K_1 \subset \mathcal{X}$ und $K_2 \subset \mathcal{Y}$.

K_1 heißt homöomorph zu K_2 , wenn es eine bijektive Abbildung $f : K_1 \rightarrow K_2$ gibt, so daß f und f^{-1} stetig sind.

K_1 heißt isotop zu K_2 (im Paar \mathcal{X}, \mathcal{Y}), wenn es eine bijektive Abbildung $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ gibt, so daß f und f^{-1} stetig sind, und $f(K_1) = K_2$ gilt.

(Homöomorphismus der umliegenden Räume, der die Knoten ineinander überführt)

Uns interessiert nicht, ob zwei Knoten K_1 und K_2 homöomorph sind. Das sind sie nämlich immer!

(Homöomorphie ist eine Äquivalenzrelation, und per Definition sind alle zum Unknoten homöomorph;

\cong aufschneiden, entwirren und zusammenkleben)

Sondern, ob sie im \mathbb{R}^3 zueinander isotop sind, d.h. ob die Außenräume $\mathbb{R}^3 \setminus K_1$ und $\mathbb{R}^3 \setminus K_2$ homöomorph sind.

(auf ganz \mathbb{R}^3 fortsetzbar; \cong durch 'Kneten' überführbar)

Wegen $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, liegt jeder Knoten auch im \mathbb{R}^4 . Daher ein Exkurs:

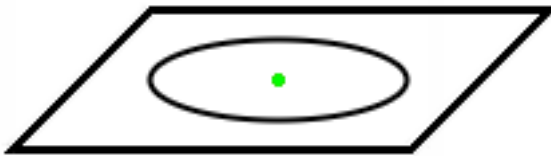
Veranschaulichung der Vierten Dimension

Man kann Zeit als 4. Dimension (zu den 3 im Raum) hinzunehmen. Dies ist aber oft ungünstig, da wir uns die Zeit für Bewegungsabläufe reservieren müssen.

Oftmals hilft 'reine Rechnung', ohne irgendeine Vorstellung. Dies machen wir uns klar.

Gegeben sei ein zweidimensionales Lebewesen in der Ebene \mathbb{R}^2 .

Es liege im Inneren eines Kreises.



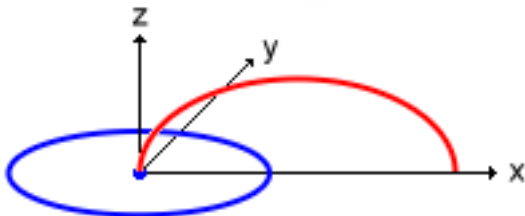
Es ist der Meinung, daß es nicht aus dem Kreis heraus kann, ohne diesen zu berühren.

(muß ihn schneiden)

(wir würden einfach drüber (in den \mathbb{R}^3) hopsen, und wären draußen;

\leftrightarrow dies versteht es aber nicht)

Ausweg in simpler Formelsprache:



$$\text{Kreis} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

$$\text{Fluchtweg} = \{(t, 0, \sin t) \in \mathbb{R}^3 : t \in [0, \pi]\}$$

$$\Rightarrow t = 0 : (0, 0, 0) \rightarrow \text{innerhalb}$$

$$t = \pi : (\pi, 0, 0) \rightarrow \text{außerhalb}$$

Die Kurve schneidet den Kreis nicht! Denn:

$$t^2 + 0^2 = 1 \wedge \sin t = 0 \quad \text{geht nicht.}$$

↔ Auch wenn das Lebewesen nicht weiß, was der \mathbb{R}^3 nun in Wirklichkeit ist, so sind ihm die Formeln verständlich.

Analog sind die Formeln für uns. Wir sind im Innern einer Kugel.

(der 'Sprung in den \mathbb{R}^4 ' und was der \mathbb{R}^4 genau ist, ist uns nicht zugänglich)

$$\text{Kugel} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, w = 0\}$$

$$\text{Fluchtweg} = \{(t, 0, 0, \sin t) \in \mathbb{R}^4 : t \in [0, \pi]\}$$

und $t^2 + 0^2 + 0^2 = 1 \wedge \sin t = 0$ hat keine Lösung, d.h. es gibt kein $t \in [0, \pi]$.

Man möchte sich das Ganze aber gern auch ohne Formeln vorstellen.

Sehr bequem kann man sich die 4. Dimension als Farbe oder Farbton vorstellen.

Für unseren zweidimensionalen Freund bedeutet dies:

Er ist in einem z.B. orangenen Kreis und ist selbst orange.

↔ Er nähert sich der Kreislinie und wird dabei langsam rot.

(dies entspricht dem Aufsteigen in den \mathbb{R}^3)

↔ Als roter Punkt kann er die orangene Linie passieren, ohne sie zu berühren, da

$$(1, 0, \text{rot}) \neq (1, 0, \text{orange})$$

↔ Dann wird er langsam wieder orange, und ist auf der anderen Seite.

\mathbb{R}^4 ist also die Menge der Punkte $(x, y, z, \text{Farbton})$.

Wir sind ein orangener Punkt in einer orangenen Kugel.

Gehen auf die Sphäre hinzu und ändern dabei unsere Farbe stetig ins Rötliche.

Dann können wir die Kugel als roter Punkt durchqueren.

(vgl.: haben rote Brille auf, und sehen nur rote Dinge)

Sind wir auf der anderen Seite, nehmen wir wieder die orangene Farbe an.

Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten

Definition 3

Ein Gebilde nennen wir zweidimensionale Mannigfaltigkeit, wenn es lokal (d.h. in hinreichend kleinen Umgebungen) wie einen Scheibe aussieht; und zwar überall.

(näheres dazu später)

Beispiel:

- offenen Mengen im \mathbb{R}^2
- die Einheitssphäre S^2 (Kugeloberfläche)

Das Quadrat mit Rand ist keine zweidimensionale Mannigfaltigkeit! Wir möchten aber gerne eine daraus machen.

Problem:



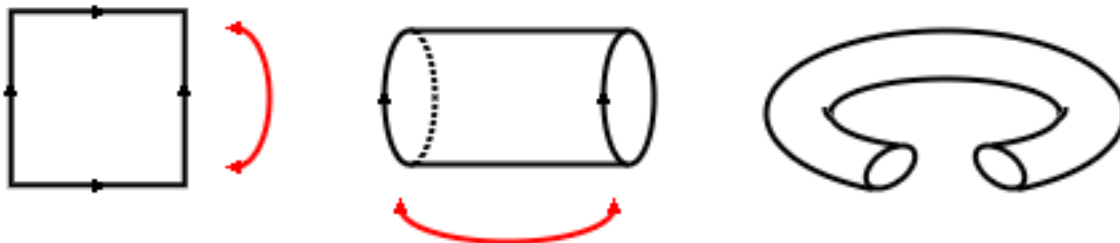
→ an den Rändern nur Halbscheiben;
und an Ecken gar nur Viertelscheiben

↔ Ausweg: identifizieren Punkte gegenüberliegender Ränder,
d.h. 'verkleben' sie (dann auch alle Ecken zusammen)

Offenbar ändert 'zerren, biegen und beulen' nichts an der Eigenschaft, lokal eine Scheibe zu sein.

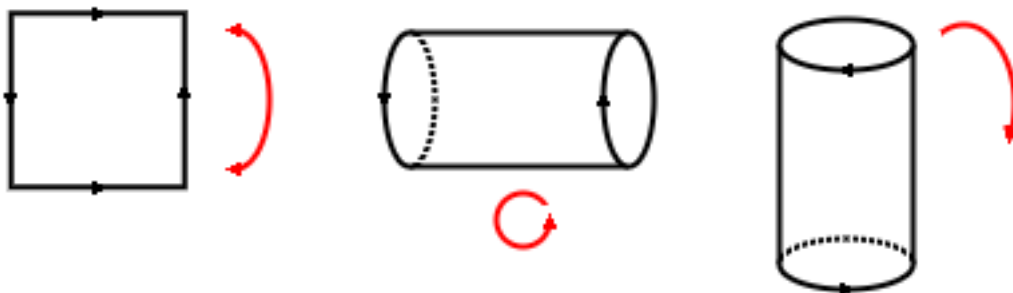
Haben nun verschiedene Möglichkeiten für die Identifikation. Die Pfeile geben an, in welcher Weise Punkte gegenüberliegender Seiten verklebt werden (parallel oder anti-parallel).

- Jeweils gegenüberliegende Punkte (in gleicher Höhe):



↔ Es entsteht der sogenannte **Torus**.

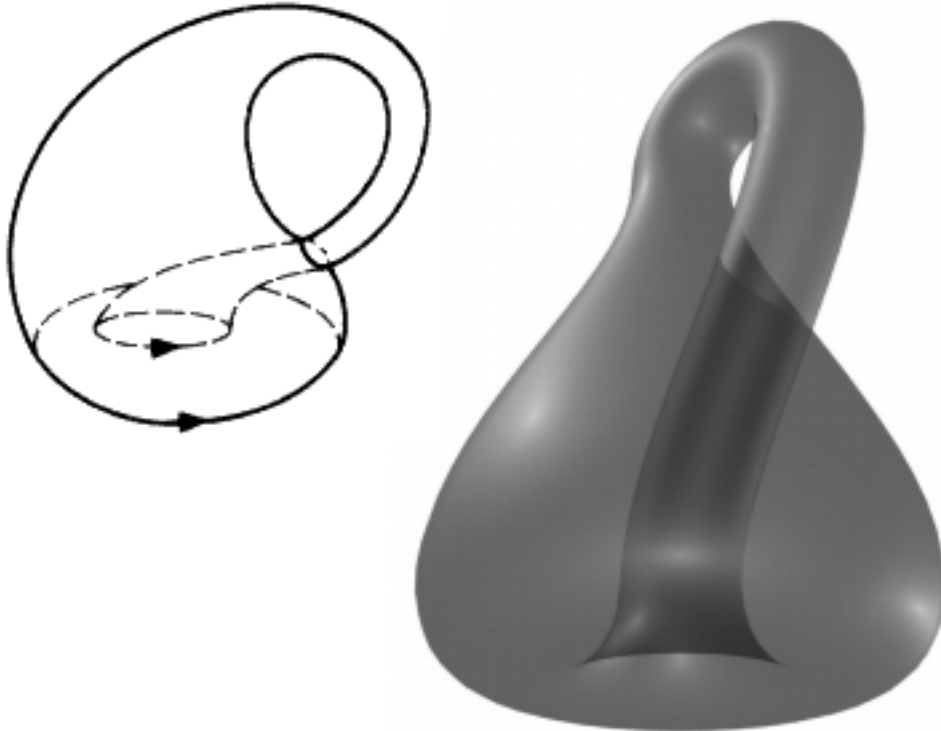
- Eine Seite um 180° drehen und dann mit gegenüberliegender Seite:



Der Anfang ist genau wie beim Torus: das parallele Seitenpaar verkleben.

Dann vergrößern wir das eine Ende des Zylinders und verkleinern das andere. Wir machen ein Loch in die Wand (d.h. machen aus einem Punkt einen Kreis), und stecken das schmale Ende hindurch. Dann ziehen wir es wieder auseinander und verkleben es mit dem anderen.

Das Resultat sieht wie folgt aus:



⇔ Es entsteht die sogenannte **Kleinsche Flasche**.



Nun könnte man aber sagen, daß jemand auf dem Lochrand auf zwei Scheiben lebt. In Wirklichkeit gibt es diese Überschneidung nur im \mathbb{R}^3 . Im \mathbb{R}^4 hat die Kleinsche Flasche keine Überschneidungen! Dies zeigt die Einfärbung.

Die Kleinsche Flasche sieht also nur nicht wie eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit aus, weil wir krampfhaft versuchen, sie uns im \mathbb{R}^3 vorzustellen.

Überführung von Knoten in andere

Wir haben also eine Motivation, uns Knoten im \mathbb{R}^4 näher zu betrachten. Besonders deshalb, weil sich Knoten im \mathbb{R}^4 über Einfärbung der Projektion ohne Probleme vorstellen lassen.

Satz 1

Im \mathbb{R}^4 ist die Kleeblattschlinge isotop zum Unknoten.

Beweis:



färben den komplett orangenen Knoten an einer Stelle langsam rot ein;
können den oberen Strang dieser Kreuzung (vgl. Abb.) einfach durchziehen;
färben alles wieder orange ein;
Schleife rüberziehen (= entknoten im \mathbb{R}^3) ergibt den Unknoten

Satz 2

Im \mathbb{R}^4 ist jeder Knoten zum Unknoten isotop.

Beweisstrategie:

Wir müssen zeigen, daß endlich viele Operationen den Unknoten erzeugen.

Wählen einen Punkt P auf der Knotenprojektion und eine Orientierung auf dem Knoten. Zerschneiden den Knoten in P und fahren ihn ab.

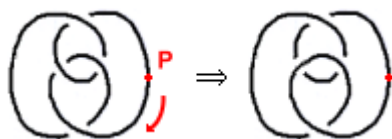
(wir zerschneiden nicht wirklich, denn dies ist nicht erlaubt;
wir binden einfach einen dehnbaren Gummi dazwischen)

Jede Kreuzung wird genau zweimal passiert bis wir wieder in P sind.
Ist sie beim ersten Mal eine Unterführung, so ändern wir sie in eine Überführung (\Rightarrow färben, da im \mathbb{R}^4); Überführungen bleiben.
Bei der zweiten Passage wird nichts geändert.

Der so entstehende Knoten ist ein Unknoten, da er sich 'bergab' abfahren läßt. Man betrachte dazu die Projektion von der Seite.

(immer in Stufen weiter runter und entlang des Gummibandes zurück)

Beispiel:



\Rightarrow Knotentheorie ist also etwas echt Dreidimensionales.

Isotopie im \mathbb{R}^3 ist i.a. schwer zu zeigen.

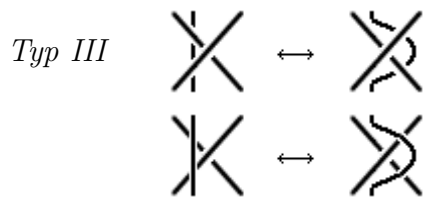
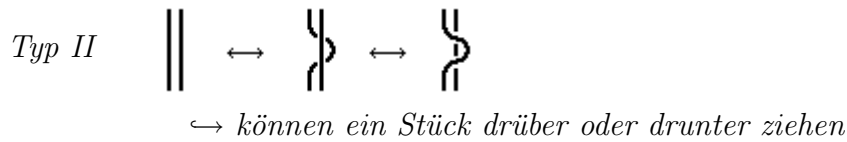
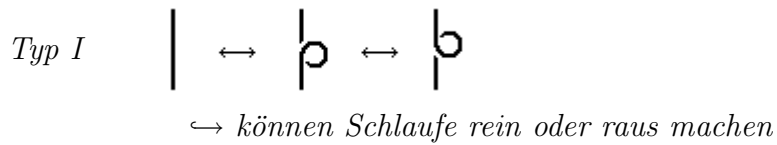
Satz 3

Isotopien im \mathbb{R}^2 sind alle Abbildungen, die die Kreuzungen nicht antasten.

1926 hat Kurt Reidemeister gezeigt, daß sich jede Isotopie im \mathbb{R}^3 über Isotopien an der Projektion im \mathbb{R}^2 und drei Typen von Elementarbewegungen (endlich viele von jeder Sorte) bewerkstelligen läßt.

Definition 4

Die **Reidemeisterbewegungen** (engl.: Reidemeister moves) sind:



Definition 5

Wir sagen, daß sich ein Knoten **in drei Farben färben läßt** (engl.: tricolorable), wenn man die Stränge der Projektion so mit 3 Farben färben kann, daß an jeder Kreuzung (von zwei Strängen) entweder drei oder genau eine Farbe zusammentreffen und dabei mindestens zwei Farben verwendet werden.

Satz 4

Die Eigenschaft, sich mit drei Farben färben zu lassen, bleibt bei Isotopien erhalten. D.h. Dreifärbbarkeit ist eine Invariante.

Beweis:

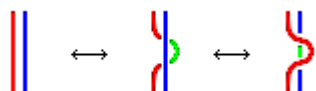
Es genügt, dies für die Reidemeisterbewegungen zu zeigen.



War der Knoten vorher mit 3 Farben färbbar so ist er es auch danach; und wenn nicht, dann wird er es auch nicht.

Beachte: bisherige Stränge müssen ihre Farbe behalten!

Lediglich neu entstandene (an beiden Seiten abgetrennt) können wir 'frei' wählen.



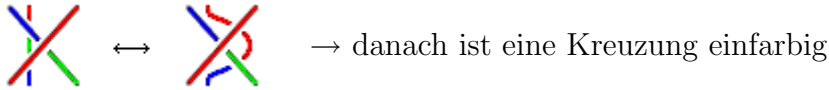
Die Eigenschaft bleibt auch hier erhalten.

Sollten beide Stränge die selbe Farbe haben, gilt die Behauptung auch.

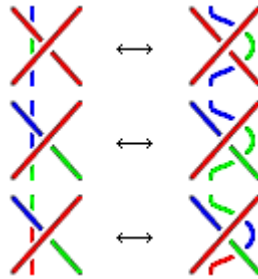
Beim Typ III haben wir folgende Möglichkeiten zur Realisierung der Dreifärbbarkeit:

1 × alle Kreuzungen einfarbig
 ↪ bleibt einfarbig

1 × alle in drei Farben



3 × eine Kreuzung einfarbig



Sind zwei Kreuzungen einfarbig, dann automatisch alle, falls die Dreifärbbarkeit erfüllt ist.

Satz 5

Die Kleeblattschlinge ist nicht zum Unknoten isotop.

Beweis:

Die Kleeblattschlinge ist dreifärbbar, der Unknoten nicht.



Verschlingungen

Neben Knoten betrachtet man noch ...

Definition 6

Verschlingungen (engl.: links) bestehen aus mehreren Komponenten, die jeweils keine gemeinsamen Punkte haben. D.h. sie sind disjunkte Vereinigungen von Knoten.

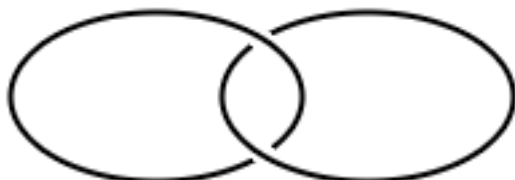
Man kann sie auffassen als 'mehrere Knoten' ohne Berührungen (d.h. mehrere Abbildungen der Einheitskreislinie); oder als eine Abbildung des 'eingeschnürten' (bzw. zerstückelten) Einheitskreises in den \mathbb{R}^3 .



Beispiele:



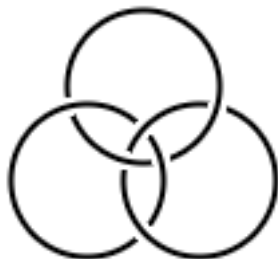
Nichtverschlingung



Hopf-Verschlingung



Salomonischer Knoten



Borromäische Ringe

Wird einer der Ringe zerschnitten, bleiben die anderen unverbunden zurück.
Sie sind das Symbol für die Freundschaft der italienischen Adelfamilien Visconti, Sforza und Borromäus.

Hier interessiert, ob die einzelnen Komponenten im \mathbb{R}^3 trennbar sind, d.h. wieder steht die Frage nach der Isotopie.

(Im \mathbb{R}^4 sind wieder alle zur n -komponentigen Nichtverschlingung isotop.)

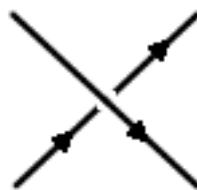
Es zeigt sich, daß Isotopien wieder über Reidemeister-Bewegungen bewirkt werden können. Benötigen daher noch eine geeignete Invariante.

Definition 7

Wir orientieren jede Komponente (= Knoten) einer Verschlingung in beliebiger Weise. Jeder Kreuzung von zwei verschiedenen Komponenten M und N ordnen wir die Zahl ± 1 wie folgt zu:



-1



+1

Addieren die erhaltenen Werte, dividieren durch 2 und gehen zum Betrag über. Dies ergibt stets eine nichtnegative ganze Zahl, die Verschlingungszahl $\nu(M, N)$ genannt wird. Der Nichtverschlingung ordnet man die Verschlingungszahl 0 zu.

Diese Regel kann man sich wie folgt merken: Der Daumen ist der obere Strang und der Zeigefinger der darunter liegende; sie sollen in die gewählte Orientierung zeigen. Ist dafür die linke Hand nötig, ergibt dies -1 , und für die rechte Hand wählt man $+1$.

Diese Definition ist korrekt, d.h. unabhängig von der gewählten Orientierung einer jeden Komponente.

Dies wird klar, wenn man beachtet, daß bei Orientierungsumkehr einer Komponente nicht nur das Vorzeichen einer Kreuzung verändert wird, sondern auch das einer weiteren.

(Kreuzungen kommen immer in einer geraden Anzahl vor, da die Komponenten geschlossen sein müssen.)

Der Betrag liefert dann den Erhalt der Gesamtzahl.

Satz 6

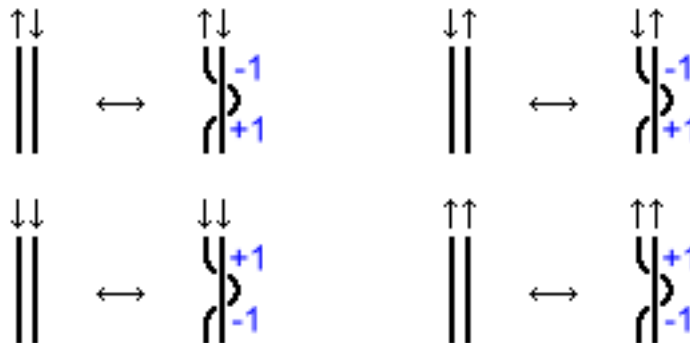
Wenn zwei Verschlingungen isotop sind, dann muß für jedes Komponentenpaar die Verschlingungszahl erhalten bleiben. D.h. die Verschlingungszahl ist eine Invariante der Isotopie.

Beweis:

Wir prüfen dies für die Reidemeister-Bewegungen:

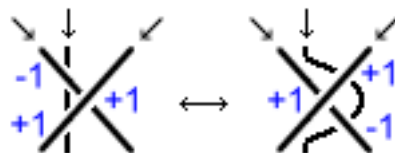
Typ I-Bewegungen braucht man nicht zu betrachten, da sie nur auf eine Komponente wirken können, wir aber nur Kreuzungen zweier betrachten.

Typ II



Für die andere Bewegung sieht dies ähnlich aus; lediglich das Vorzeichen ist im Vergleich zu obigem Bild umgekehrt.

Typ III

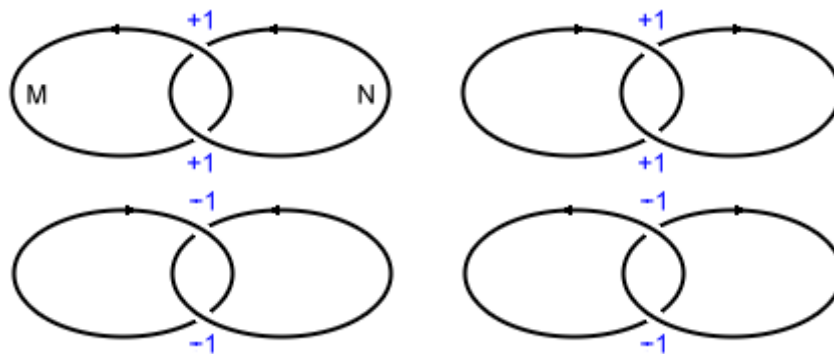


Analog sieht das bei allen anderen Möglichkeiten aus:

Eine Kreuzung bleibt unverändert; und zwei wechseln ihre Position.

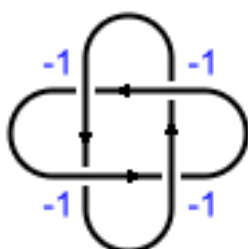
Hierfür ist natürlich wichtig, daß Kreuzungen immer paarweise ihr Vorzeichen ändern, und der Betrag der Summe somit unabhängig von der jeweiligen Orientierung der einzelnen Komponenten ist.

Beispiel:



Wir erhalten: $\nu(M, N) = 1$

D.h. die Hopf-Verschlingung ist (im \mathbb{R}^3) nicht isotop zur Nichtverschlingung.
(alles andere hätte uns auch sehr gewundert !)



Es gilt also: $\nu(M, N) = 2$

D.h. der Salomonische Knoten ist nicht in seine Komponenten zerlegbar; und er kann auch nicht in die Hopf-Verschlingung umgeformt werden.

Bemerkung: Gordischer Knoten

Benannt nach Gordion, der Hauptstadt des Phrygerreiches.

Der Legende nach ist dies eine kunstvolle Verknotung an der Wagendeichsel des sagenhaften Königs Gordios, die mit Hilfe der Götter geschah. Ein Orakel prophezeite, daß derjenige, der diesen Knoten lösen kann, König von Asien werden solle.

Die (wohl nicht sehr mathematische) Lösung dieses Problems soll 333 v.Chr. durch Alexander den Großen mittels Schwerthieb gefunden worden sein. Dies leitete tatsächlich seine Herrschaft als König von Asien ein.

Nach der Vorlesung 'Ausgewählte Kapitel der Algebra, Analysis und Geometrie' (Sommersemester 2002) von Prof. A. Böttcher; Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz

Einige Seiten zum Thema:

- [Wolfram Research: MathWorld](#)
- [MathWorld: Knot Theory](#)
- [The KnotPlot Site](#)
- [Atlas of oriented knots and links](#)
- [KNOTS](#)
- [History of Knot Theory](#)

