8 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

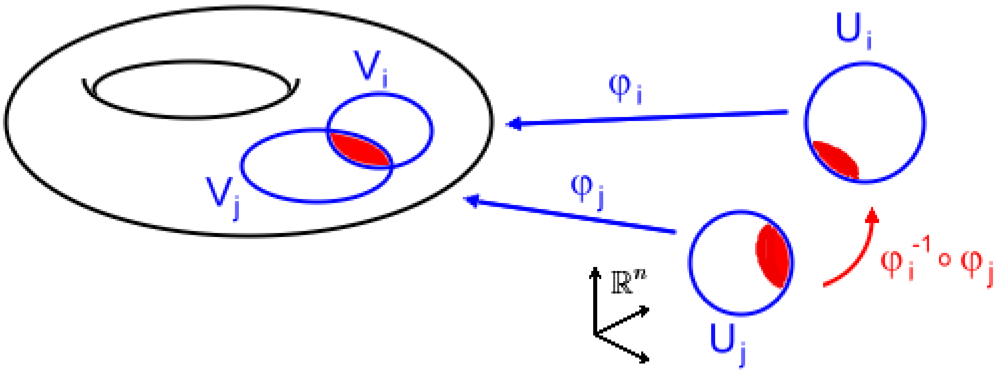
Begriffe und Beispiele

Definition 1

Sei $\mathcal{M}$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann existieren offene Teilmengen (in $\mathcal{M}$)

$$V_j \quad (j \in J) \quad \text{mit} \quad \mathcal{M} \subset \bigcup_{j\in J} V_j \quad \text{(offene Überdeckung)}$$

und Homöomorphismen $\varphi_j : U_j \to V_j \quad (U_j \subset \mathbb{R}^n$ *offen).*



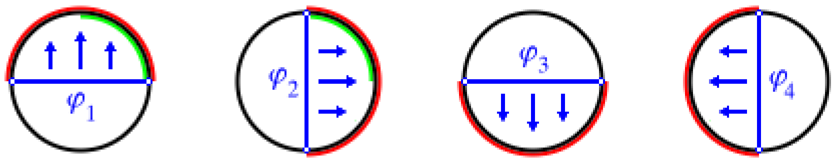
Das System $\{(U_j, \varphi_j)\}$ heißt Atlas für $\mathcal{M}$ und jedes Paar (U_j, φ_j) wird Karte genannt.

Ist $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, so erhalten wir eine Funktion $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j : \varphi_j^{-1}(V_i \cap V_j) \to \varphi_i^{-1}(V_i \cap V_j)$. Solche Funktionen heißen Kartenwechsel. (Diese Funktion ist stetig!)

Sind alle möglichen Kartenwechsel differenzierbar (C^1, C^p, C^∞?) , so nennt man den Atlas differenzierbar. Eine Mannigfaltigkeit mit einem differenzierbaren Atlas heißt differenzierbare (oder glatte) Mannigfaltigkeit.
(Im Gegensatz zu den bisher von uns betrachteten topologischen Mannigfaltigkeiten zählt hier das Paar aus Menge und Atlas!)

Beispiel 1:

S^1 ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, z.B. mit dem Atlas aus folgenden vier Karten:



$$\varphi_{1,3}(x) = (x, \pm\sqrt{1-x^2}) \qquad \varphi_{2,4}(x) = (\pm\sqrt{1-x^2}, x)$$

(Da S^1 eindimensional ist, ist U_i ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$, z.B. $(-1, 1)$, hier blau gezeichnet.)

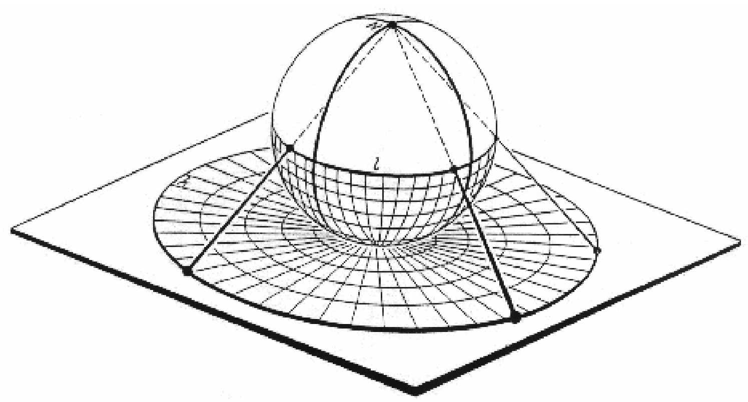
Die Kartenwechsel sind differenzierbar; z.B. gilt für den grünen Bogen:

$$(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(x) = \sqrt{1-x^2}\,, \quad x \in (0, 1)$$

Beispiel 2:

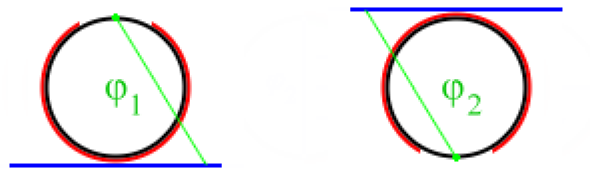
S^2 ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, z.B. mit dem Atlas aus folgenden zwei Karten:

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{R}^2, \text{stereographische Projektion}) & \mapsto & S^2 \backslash N \\ (\mathbb{R}^2, \text{stereographische Projektion}) & \mapsto & S^2 \backslash S \end{array}$$
$$(N - \text{Nordpol} \; ; \; S - \text{Südpol})$$



Es sind zwei Karten nötig, da die Projektion ihr Zentrum (einen der Pole) nicht abbilden kann.

Analog würden auch für S^1 zwei Karten genügen:



Die Karten-Homöomorphismen sind natürlich schwieriger anzugeben.

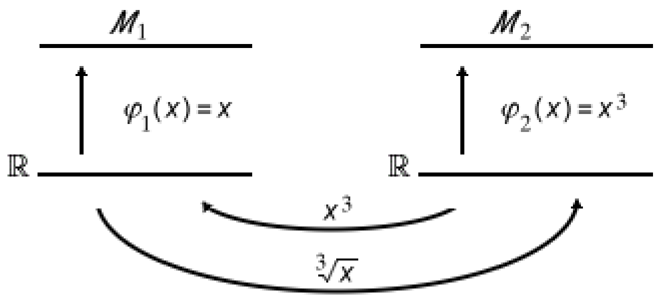
Definition 2

Zwei Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ für $\mathcal{M}$ heißen verträglich, wenn $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ (alle Karten zusammen geworfen) wieder ein differenzierbarer Atlas ist.

Beispiel 3:

$\mathcal{M}_1$ sei $\mathbb{R}$ mit Atlas $\{(\mathbb{R}, \varphi_1(x) = x)\}$ und
$\mathcal{M}_2$ sei $\mathbb{R}$ mit Atlas $\{(\mathbb{R}, \varphi_2(x) = x^3)\}$.

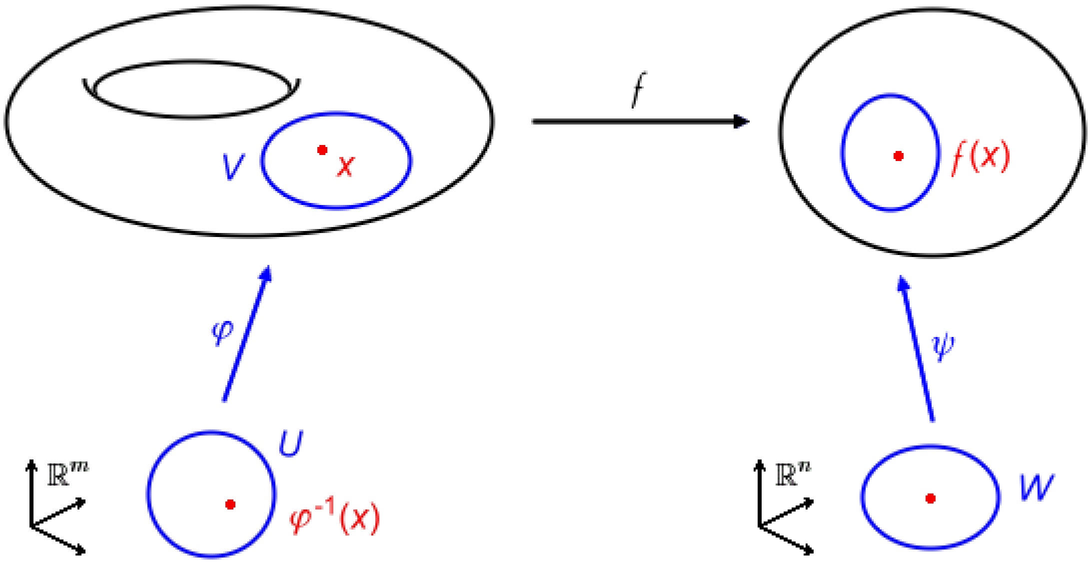
Jeder Atlas für sich genommen ist differenzierbar (da es nur eine Karte gibt, haben wir keine Übergänge).
Aber diese beiden Atlanten sind nicht verträglich!



Erhalten durch Vereinigung zwei mögliche Kartenwechsel:
x^3 ist differenzierbar, aber $\sqrt[3]{x}$ nicht in $x = 0$!

Auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten kann man Differentialrechnung betreiben:

Definition 3
Seien $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ eine Funktion.



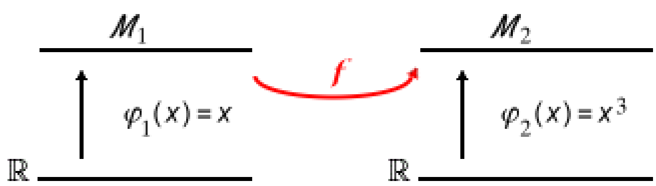
Dann heißt f differenzierbar in $x \in \mathcal{M}$, wenn für jede Karte (U, φ) mit $x \in \varphi(U)$ (d.h. jede Karte, die x enthält) und jede Karte (W, ψ) mit $f(x) \in \psi(W)$ die Abbildung $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ (definiert $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$) in $\varphi^{-1}(x)$ differenzierbar ist.

Ein Diffeomorphismus ist eine bijektive Abbildung $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, für die f und f^{-1} differenzierbar (in jedem Punkt von $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{N}$) ist.

Sphäre und Würfeloberfläche sind zwar homöomorph (d.h. stetig ineinander überführbar), aber nicht diffeomorph, da der Würfel an sich aufgrund der Ecken schon nicht differenzierbar ist. Dies spaltet von der Topologie die sog. Differentialtopologie ab.

Beispiel 3:

$\mathcal{M}_1$ ist diffeomorph zu $\mathcal{M}_2$ (obwohl die Atlanten nicht verträglich sind).



Wählen $f(y) := y^3$. Diese Funktion ist offenbar bijektiv, und es gilt:

$$(\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1)(x) = \sqrt[3]{(x)^3} = x \quad \Rightarrow \; f \text{ differenzierbar}$$

$$(\varphi_1^{-1} \circ f^{-1} \circ \varphi_2)(x) = \sqrt[3]{(x^3)} = x \quad \Rightarrow \; f^{-1} \text{ differenzierbar}$$

Über die 7-dimensionale Sphäre und Tücken der 4. Dimension

Satz 1 *(Milnor, 1957)*
Es gibt genau 28 verschiedene nicht diffeomorphe differenzierbare Strukturen auf S^7. Mit anderen Worten, es gibt 28 differenzierbare Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}_1, ..., \mathcal{M}_{28}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) *Jede dieser Mannigfaltigkeiten ist zu S^7 homöomorph.*

ii) *Keine zwei dieser Mannigfaltigkeiten sind zueinander diffeomorph.*

iii) *Jede zu S^7 homöomorphe differenzierbare Mannigfaltigkeit ist zu genau einer dieser 28 differenzierbaren Mannigfaltigkeiten diffeomorph.*

Dieses Resultat wurde erweitert von ...

Satz 2 *(Brieskorn, 1966)*
Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_k$ $(k = 1, ..., 28)$ ist die Teilmenge aller $z \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^{10}$ die folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{gathered} |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3| + |z_4|^2 + |z_5|^2 = 1 \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^{6k-1} = 0 \end{gathered}$$

mit der von $\mathbb{C}^5 = \mathbb{R}^{10}$ vererbten differenzierbaren Struktur.

Bemerkung
In der ersten Gleichung steht bei z_3 wirklich kein Quadrat!

Jede Gleichungsbedingung verringert die Dimension des Ausgangsraumes um 1. Die zweite Gleichung sind in Wirklichkeit 2, da Real- und Imaginärteil verschwinden müssen.

Insgesamt ergibt sich also tatsächlich etwas der Dimension $10 - 3 = 7$.

Bekannt ist, daß es für S^n die folgenden Anzahlen von nicht diffeomorphen Strukturen gibt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	1	1	1	≥ 2	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256

Bei S^4 kennt man nur 2, weiß aber nicht, ob es noch mehr gibt.

Ein weiteres Resultat besagt:

Satz 3 *(Freedman, 1982 / Donaldson, 1983)*
Es gibt ein Kontinuum von nicht diffeomorphen differenzierbaren Strukturen auf $\mathbb{R}^4$ (d.h. überabzählbar viele!), aber für $\mathbb{R}^n$ $(n \neq 4)$ gibt es genau eine!

Weiterhin ist bekannt:

1) Jede 2-dimensionale zusammenhängende und kompakte Mannigfaltigkeit (eindeutig bis auf Homöomorphie bestimmt) hat genau eine differenzierbare Struktur.

2) Viele 4-dimensionale kompakte und zusammenhängende Mannigfaltigkeiten haben gar keine differenzierbare Struktur.

(Man beachte, daß bei dieser Aussage z.B. Sphäre und Würfel als ein und dieselbe (topologische) Mannigfaltigkeit angesehen werden; und unter allen Homöomorphen die mit differenzierbarem Atlas betrachtet wird.)

Dies zeigt wieder einmal, daß bis zur Dimension 3 nicht genug Platz für schlimme Dinge ist. Aber ab der 5. Dimension ist genügend Platz vorhanden, um diese wieder gerade zu biegen.

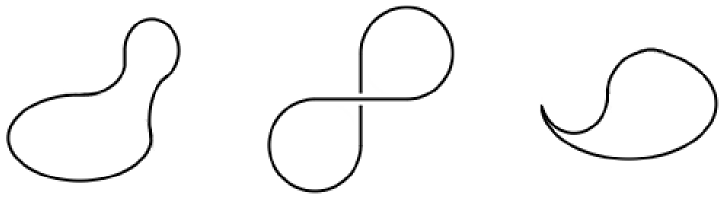
Von Einbettungen und Immersionen

Definition 4
Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ heißt Einbettung, wenn f differenzierbar und injektiv ist.

$f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ heißt Immersion, wenn f differenzierbar und lokal injektiv ist, d.h. zu jedem Punkt $x \in \mathcal{M}$ gibt es eine offene Umgebung $V \subset \mathcal{M}$, sodaß $f|_V$ injektiv ist.
(Eine Immersion läßt also Selbstüberschneidungen bzw. -durchdringungen zu.)

Beispiele:

S^1

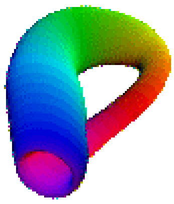


Erstes ist eine Einbettung, das zweite eine Immersion in den $\mathbb{R}^2$. Das letzte ist nicht einmal differenzierbar.

$S^2 + 2\mu$

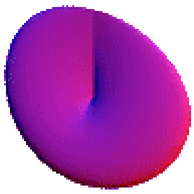
Die Kleinsche Flasche ist eine Immersion dieser Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$.

Durch Einfärben erhält man eine Einbettung in den $\mathbb{R}^4$.

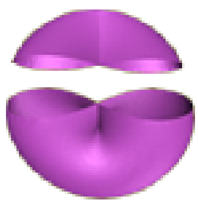


$S^2 + \mu = \mathbb{RP}^2$

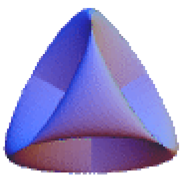
Für die Projektive Ebene haben wir verschiedene Darstellungsmöglichkeiten:



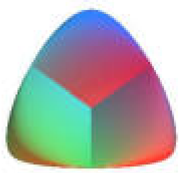
Die Kreuzhaube im $\mathbb{R}^3$ ist nichts von beidem, da sie aufgrund des Klemmpunktes (Singularität) nicht differenzierbar ist.



Eine andere Möglichkeit, Möbiusband und Scheibe am Rand zu verkleben, ist die Römer–Fläche (Steiner–Fläche; engl.: roman surface).

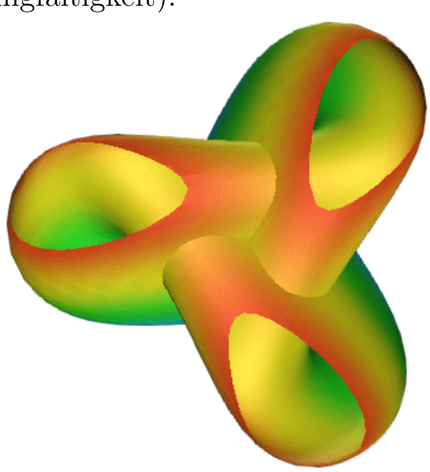
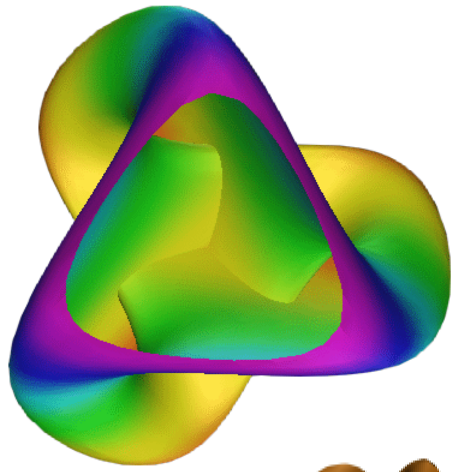


Sie zeichnet sich durch hohe Symmetrie aus.
Schneidet man eine Kante ab, so entsteht der sog. Whitney-Schirm (engl.: W. umbrella).

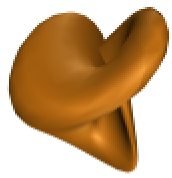


Die Projektive Ebene ist natürlich lokal injektiv. Die Frage, ob es eine Repräsentation ohne Singularitäten gibt, wurde 1902 mit einem Beispiel von Werner Boy beantwortet.
(Dieser sollte eigentlich in seiner Dissertation unter Hilbert zeigen, daß eine solche nicht existiert!)

Er fand folgende Immersion im $\mathbb{R}^3$ (also eine differenzierbare Mannigfaltigkeit):

Oben sieht man diese mit Fenstern, um in das Innere blicken zu können. Rechts sind Bilder von der Seite.



Diese Fläche besitzt einen Tripelpunkt, der oben gut zu erkennen ist.

Somit existiert auch eine Einbettung der Projektiven Ebene in den $\mathbb{R}^4$ (Färbung).

Satz 4 *(Whitney, 1944)*
Jede C^1-Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 1$ läßt sich in den $\mathbb{R}^{2n}$ einbetten, und jede C^1-Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$ besitzt eine Immersion in den $\mathbb{R}^{2n-1}$.
(I.a. läßt sich dies nicht verschärfen.)

Definition 5
Zwei Einbettungen $f, g : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ heißen isotop, wenn es ein $\varepsilon > 0$ und eine differenzierbare Abbildung $H : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- $H(0, x) = f(x) \;\; \forall\, x \in \mathcal{M} \quad (H_0 = f)$
- $H(1, x) = g(x) \;\; \forall\, x \in \mathcal{M} \quad (H_1 = g)$
- $H_t : \mathcal{M} \to \mathcal{N}, x \mapsto H(t, x)$ *ist eine Einbettung* $\forall\, t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

(Haben also eine Schar von Einbettungen, die differenzierbar ineinander übergehen, d.h. differenzierbar vom Parameter t abhängen. Das ε ist nötig, um Differenzierbarkeit bei 0 und 1 zu erklären.)

Analog definiert man die Isotopie von Immersionen.

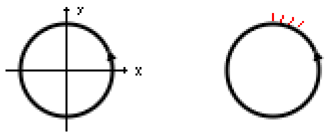
Man sieht zwei Einbettungen / Immersionen also als gleich an, wenn sie glatt ineinander deformierbar sind (Homotopie bedeutet nur einen stetigen Übergang).

Vom Wenden und Kämmen der Sphäre

Betrachten nun ein derartiges Problem näher: Ist die n-Sphäre, als Immersion im $\mathbb{R}^{n+1}$, isotop zur entgegengesetzt orientierten Immersion? D.h. kann man die (eingebettete) Sphäre wenden, nur mittels Selbstüberschneidungen und ohne sie zu 'knicken' oder zu 'zerreißen'?

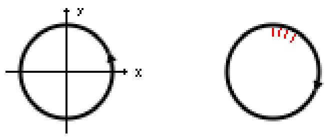
Beispiel: S^1 in $\mathbb{R}^2$:

$f : S^1 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x,y)$



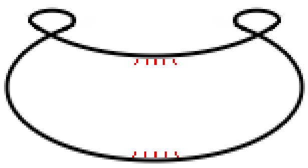
S^1 $f(S^1)$

$g : S^1 \to \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = (x,-y)$



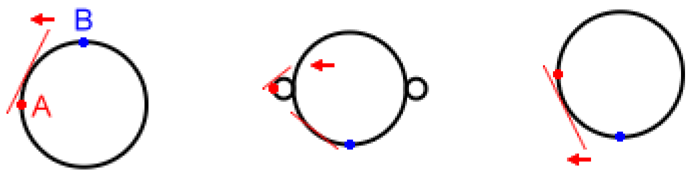
S^1 $g(S^1)$

Diese beiden Abbildungen (selbst sogar Einbettungen) sind als Immersionen nicht isotop:



Es geht also darum, die roten Härchen von außen nach innen zu drehen, ohne dabei die Ebene zu verlassen.
Wie man im Bild erkenn kann, ist dies bei fast allen Punkten kein Problem.

Wenn man aber nun die Schlaufen enger zieht, geht die Differenzierbarkeit verloren. Dies kann man wie folgt einsehen:



Ein Punkt unserer Ausgangskurve besitzt eine vertikale Tangente. Die zugehörigen Argumente x, y dieses Punktes A sowie eines Bezugspunktes B merken wir uns. Wenn wir von B (blau) entlang der Orientierung der Kurve zu A (rot) gehen, so geht der Anstieg der Tangente an die Kurve gegen $+\infty$. Wir beobachten den entsprechenden Punkt zu den Koordinaten (x,y) auf (irgendwie) transformierten Kurven.
Auch auf jeder Zwischenkurve muß es einen Punkt mit vertikaler Tangente geben. Da dieser aber in differenzierbarer Weise von A abhängt, mit A beginnt und in der Zielkurve wieder dort ankommt, sollte klar sein, daß differenzierbare Transformationen zwar endliche Ableitungen (nahezu) beliebig verändern können, nicht aber den Grenz–Anstieg $+\infty$ der Tangente.

Bei der Zielkurve ist der Grenz–Anstieg aber $-\infty$. Sie kann somit nicht isotop zur Ausgangskurve sein.

Der aufmerksame Leser hat sicher bemerkt, daß die Mannigfaltigkeiten (Kurven) natürlich homotop zueinander sind, da dort einseitige Tangenten-Anstiege nicht von Bedeutung sind, sondern nur stetige Operationen.

S^2 in $\mathbb{R}^3$:

$f : S^1 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x, y, z)$
$g : S^1 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x, y, -z)$
(an Ebene gespiegelt)

In seiner Doktorarbeit zeigte Stephen Smale, daß f und g als Immersionen isotop sind!

Man kann also die Kugeloberfläche im $\mathbb{R}^3$ umstülpen; mit Selbstüberschneidungen, aber ohne sie zu knicken.

Die erste anschauliche Beschreibung eines derartigen Wendeprozesses gelang Bernhard Morin, der erstaunlicherweise blind war.

Das Problem läßt sich auch mit S^n im $\mathbb{R}^{n+1}$ betrachten, da die Sphäre eine orientierbare Mannigfaltigkeit ist.

Satz 5
S^n läßt sich im $\mathbb{R}^{n+1}$ von innen nach außen wenden, d.h. die zwei Orientierungen sind als Immersionen zueinander isotop, genau dann wenn $n = 2$ oder $n = 6$ ist.
(In allen anderen Fällen geht dies nicht!)

Inzwischen gibt es (für $n = 2$) mehrere Möglichkeiten, die Sphärenwendung zu realisieren.

Jetzt wollen wir uns einer Frage näher widmen, die mit Immersionen nichts zu tun hat, aber auch nur bei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten Sinn macht. Dafür brauchen wir zunächst ein paar Begriffe.

Definition 6
Der Tangentialraum eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch die Menge aller gebundenen Vektoren

$$\mathcal{T}_x\mathbb{R}^n \;:=\; \{(x, y)\;:\; y \in \mathbb{R}^n\}$$

ausgestattet mit den algebraischen Operationen:

$$\begin{aligned}(x, y_{(1)}) + (x, y_{(2)}) \;&:=\; (x, y_{(1)} + y_{(2)})\\ \lambda(x, y) \;&:=\; (x, \lambda y)\end{aligned}$$

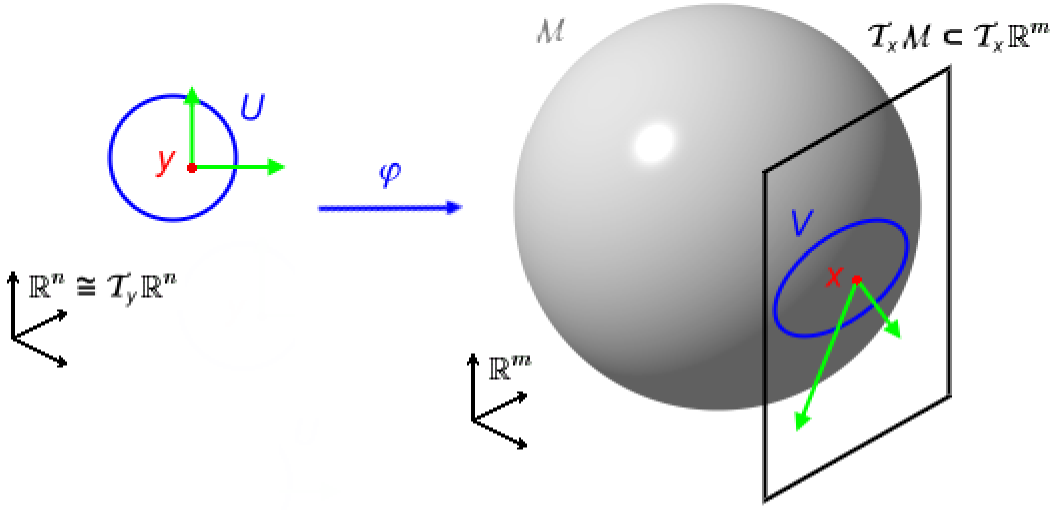
geerbt von der Struktur des $\mathbb{R}^n$.

(Wir verschieben also den $\mathbb{R}^n$ in den Punkt x; Vektoren, die in unterschiedlichen Punkten angeheftet sind, können nicht addiert werden!)

Sei nun $\mathcal{M}$ eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Bekanntermaßen ist diese als Einbettung in den $\mathbb{R}^m$ (mit einem gewissem $m \geq n$, vgl. Satz von Whitney) betrachtbar. Sei weiter $x \in \mathcal{M}$ ein Punkt. Dann existiert eine Karte um x, d.h. es gibt offene Mengen $V \subset \mathcal{M}$ ($x \in V$) und $U \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$. Setzen $y := \varphi^{-1}(x)$ und über die Ableitung die Abbildung

$$\varphi_y^* : \mathcal{T}_y\mathbb{R}^n \to \mathcal{T}_x\mathbb{R}^m,\ (y, z) \mapsto (\varphi(y), \partial\varphi(z)).$$

Dann ist der Tangentialraum von $\mathcal{M}$ im Punkt x definiert durch $\mathcal{T}_x\mathcal{M} := \varphi_y^*(\mathcal{T}_y\mathbb{R}^n)$.



Diese Definition ist korrekt, d.h. unabhängig von der Wahl der Karte (U, φ).
Anmerkung: Eine glatte n-Mannigfaltigkeit ist natürlich lokal zum $\mathbb{R}^n$ diffeomorph.

Der Tangentialraum ist also das, was man sich darunter vorstellt: aufgespannt durch die über die Ableitung transformierten n Basisvektoren und angeheftet in x.

Die Einbettung ist nötig, um den Zielraum von φ_y^* zu erklären.

Definition 7

Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld ist eine Abbildung $v : \mathcal{M} \to \{x\} \times \mathbb{R}^m$, die jedem Punkt der Mannigfaltigkeit einen (gebundenen) Vektor zuordnet.

Ein Vektorfeld heißt tangential, wenn für jeden Punkt $x \in \mathcal{M}$ der zugeordnete Vektor $v(x)$ im entsprechenden Tangentialraum $\mathcal{T}_x\mathcal{M}$ liegt.

Uns interessiert nun, ob man ein Vektorfeld an die Sphäre S^n im Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ anschmiegen kann, sodaß sich die einzelnen Vektoren stetig ändern, und nicht gleich dem Nullvektor sind (sonst ist die Frage trivial).

Beispiel:

Was der Tangentialraum von S^1 ist, ist klar:
Wir legen die Tangente an den Kreis im gegebenen Punkt.

Wie das Bild zeigt, gibt es hier ein solches Vektorfeld.

Satz 6 *(Satz vom Igel)*
Auf einer Sphäre S^{2k} gerader Dimension gibt es kein nirgends verschwindendes, tangentiales und stetiges Vektorfeld.

Auf einer Sphäre S^{2k+1} ungerader Dimension gibt es derartige Vektorfelder.

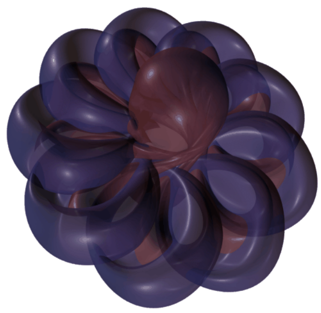
Interpretation: Ein Igel (der nichts weiter ist als eine gefüllte S^2) kann nicht so gekämmt werden, daß seine Borsten (mit gewisser Länge) ein tangentiales und stetiges Vektorfeld bilden. Mit anderen Worten, er kann nicht glatt gekämmt werden.

Für unser beliebtes Beispiel S^3 gibt es demnach ein solches Tangenten-Vektorfeld.

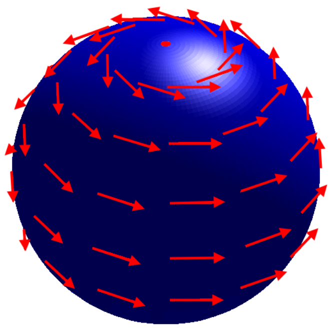
Bemerkung
Neben Differentialrechnung kann auch Geometrie auf Mannigfaltigkeiten betrieben werden. Auch eine Integrationstheorie kann darauf aufgebaut werden.
Der Begriff der Orientierbarkeit ist über Vektorfelder definierbar: Eine Mannigfaltigkeit heißt orientierbar, wenn es ein stetiges Einheitsnormalenfeld (d.h. orthogonal auf dem Tangentialraum) gibt. (Diese Definition nutzt natürlich den Satz von Whitney.)

Nach der Vorlesung 'Ausgewählte Kapitel der Algebra, Analysis und Geometrie' (Sommersemester 2002) von Prof. A. Böttcher; Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz

Einige Seiten zum Thema:



Wolfram Research: MathWorld
Geometry Center: The Projektive Plane
Concise Encyclopedia of Mathematics
Mathematics Page
Surfaces by Paul Bourke
Mathematical Surfaces
Boy's Surface
Recreation Geometrique: Les différents visages du plan projectif
La surface de Boy
Outside In - Sphere Eversion
The Optiverse
Erik de Neve
Differenzierbare Mannigfaltigkeiten
Differentialgeometrie und Physik
Von Topologischen Mannigfaltigkeiten bis zu Vektorfeldern
Lie–Gruppen als differenzierbare Mannigfaltigkeiten
Topologie



Weitere Informationen findet man im WWW unter den Suchworten:

'differential topology'
'boy surface'
'steiner roman surface'
'sphere eversion'