

# Vorlesungsskript Mathematik III für Wirtschaftsingenieure

Verfasserin:

HSD Dr. Sybille Handrock

TU Chemnitz

Fakultät für Mathematik

e-mail: handrock@mathematik.tu-chemnitz.de

Wintersemester 2006/2007

## Literatur

- [1] *Burg, K., Haf, H., Wille, F.*: Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd. 2, 3, B. G. Teubner, Stuttgart, 2003, 2002.
- [2] *Dallmann, H., Elster, K. H.*: Einführung in die höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Bd. 2, 3, Uni-TB GmbH, Stuttgart 1991, 1992.
- [3] *Dietmaier, C.*: Mathematik für Wirtschaftsingenieure, Fachbuchverlag, Leipzig, 2005.
- [4] *Fröhner, M., Windisch, G.*: Elementare Fourier-Reihen, EAGLE 018, Edition am Gutenbergplatz, Leipzig, 2004.
- [5] *Henze, N., Last, G.*: Mathematik für Wirtschaftsingenieure und für naturwissenschaftlich-technische Studiengänge, Bd. 2, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2005.
- [6] *Heuser, H.*: Gewöhnliche Differentialgleichungen, B.G. Teubner, Stuttgart, 2004.
- [7] *Neumayer, B., Kaup, S.*: Mathematik für Ingenieure III, Shaker Verlag, Aachen, 2004.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vektoranalysis</b>	<b>1</b>
1.1	Vektorfunktionen . . . . .	1
1.2	Skalar- und Vektorfelder . . . . .	3
1.3	Produkte des Nabla-Operators mit einem SF bzw. VF . . . . .	4
1.4	Nabla-Rechnung . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Integralrechnung für reelle Funktionen mehrerer reeller Variablen</b>	<b>8</b>
2.1	Ebene und räumliche Bereichsintegrale . . . . .	8
2.2	Kurvenintegrale . . . . .	10
2.3	Oberflächenintegrale . . . . .	13
2.4	Variablensubstitution in Bereichsintegralen . . . . .	15
2.4.1	Krummlinige Koordinatensysteme . . . . .	15
2.4.2	Substitutionsformeln für Bereichsintegrale . . . . .	16
2.5	Die Integralsätze . . . . .	18
2.5.1	Die Divergenz und der Integralsatz von Gauß . . . . .	18
2.5.2	Die Rotation und der Integralsatz von Stokes . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Approximation von Funktionen</b>	<b>21</b>
3.1	Funktionsfolgen und Funktionenreihen . . . . .	21
3.2	Approximation durch Potenzreihen . . . . .	22
3.3	Approximation durch Fourier-Reihen . . . . .	24
3.3.1	Periodische und periodisch fortsetzbare Funktionen . . . . .	24
3.3.2	Reelle Fourier-Reihen . . . . .	26
3.3.3	Komplexe Fourier-Reihen . . . . .	31
3.3.4	Konvergenzaussagen . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Integraltransformationen</b>	<b>36</b>
4.1	Die Laplace-Transformation . . . . .	36
4.2	Eigenschaften der LT . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Gewöhnliche Differenzialgleichungen</b>	<b>39</b>
5.1	Gewöhnliche Differenzialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	39
5.1.1	Definition und einfachste Spezialfälle . . . . .	39
5.1.2	Geometrische Interpretation für gDG der Form $y' = f(x, y)$ . . . . .	40
5.1.3	GDG mit trennbaren Variablen . . . . .	41

5.1.4	Lineare gDG 1. Ordnung . . . . .	41
5.2	Systeme lgDG 1. Ordnung . . . . .	43
5.2.1	Allgemeine Bemerkungen . . . . .	43
5.2.2	Lösungsstruktur linearer Systeme . . . . .	44
5.2.3	Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	45
5.3	LgDG n-ter Ordnung . . . . .	47
5.3.1	Allgemeine Bemerkungen . . . . .	47
5.3.2	LgDG n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>50</b>

# 1 Vektoranalysis

## 1.1 Vektorfunktionen

**Definition 1.1** Wird jedem Wert einer skalaren Variablen  $t$  mit  $t \in [t_1, t_2]$  ein **Ortsvektor**  $\mathbf{r}(t)$  zugeordnet, dann heißt  $\mathbf{r}(t)$  eine **Vektorfunktion** der skalaren Variablen  $t$ . Die Endpunkte von  $\mathbf{r}(t)$  liegen in der Ebene auf einer **ebenen Kurve** bzw. im Raum auf einer **Raumkurve**, die wir mit  $C$  bezeichnen.

Deutet man die skalare Variable  $t$  als die Zeit, so beschreibt  $\mathbf{r}(t)$  die **Bahnkurve** eines Massenpunktes. Die skalare Variable kann auch andere Bedeutungen haben, z. B. kann  $t$  ein Winkel sein.

Wie für konstante **Ortsvektoren** gilt:

1. in der Ebene

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \\ \mathbf{r}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

2. im Raum

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \\ \mathbf{r}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dabei gilt:  $D(\mathbf{r}) = [t_1, t_2]$ ,  $W(\mathbf{r}) = C$ ,  $\mathbf{r}(t_1)$  ( $\mathbf{r}(t_2)$ ) ist der **Ortsvektor** des Anfangspunktes  $P_1 = (x(t_1), y(t_1), z(t_1))$  (Endpunktes  $P_2 = (x(t_2), y(t_2), z(t_2))$ ) von  $C$ .

Die **Koordinatenfunktionen**  $(x(t), y(t))$  bzw.  $(x(t), y(t), z(t))$  einer **Vektorfunktion** nennt man auch eine **Parameterdarstellung** der **ebenen** bzw. **Raumkurve**. Eine Kurve kann durch mehrere **Parameterdarstellungen** beschrieben werden.

### Beispiel 1.1 (Parameterdarstellungen von Kurven)

(1) *Kreislinie*  $x^2 + y^2 = a^2$  (implizite Darstellung)

1° Der Parameter  $t$  sei der Winkel zwischen dem Ortsvektor  $\mathbf{r}(t)$  eines Punktes  $P$  auf der Kreislinie und der positiven Richtung der  $x$ -Achse. Dann gilt:

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t \quad t \in [0, 2\pi].$$

2° Der Parameter  $\tau$  sei der Anstieg der Geraden durch die Punkte  $O$  und  $P$ . Dann gilt:

$$\tau = \tan t = \frac{y}{x} \implies y = x\tau \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = a^2 \implies x^2 + x^2\tau^2 = a^2,$$

also

$$x(\tau) = \pm \frac{a}{\sqrt{1 + \tau^2}}, \quad y(\tau) = \pm \frac{a\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}} \quad \tau \in ] -\infty, +\infty [.$$

(2) Die Schraubenlinie als Beispiel einer **Raumkurve**

Wir betrachten einen geraden Kreiszylinder mit dem Radius  $a$ , dessen Grundfläche in der  $x, y$ -Ebene liegt und dessen Rotationsachse durch den Koordinatenursprung geht. Gesucht ist die **Bahnkurve** eines Punktes  $P = (x, y, z)$  auf dem Zylindermantel, der sich um die Rotationsachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  dreht und gleichzeitig parallel zur Rotationsachse eine Aufwärtsbewegung mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  ausführt. Wir setzen  $p := \frac{v}{\omega}$ . Ferner sei  $t$  der Winkel zwischen der Geraden durch die Punkte  $O$  und  $P'$ , wobei  $P'$  die senkrechte Projektion von  $P$  in die  $xy$ -Ebene ist, und der positiven Richtung der  $x$ -Achse. Die Aufwärtsbewegung erfolge proportional zu  $t$ . Dann gilt:

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t \quad z(t) = pt \quad t \in [0, 2\pi].$$

Der Höhenunterschied, den der Punkt  $P$  bei einer vollen Umdrehung durchläuft, heißt **Ganghöhe**  $h$ . Mithin ergibt sich, wenn  $T$  die Zeitdauer für eine volle Umdrehung bezeichnet

$$p = \frac{v}{\omega} = \frac{vT}{2\pi} = \frac{h}{2\pi}.$$

Deshalb heißt  $p$  auch die **reduzierte Ganghöhe**.

**Definition 1.2** Wird jedem Vektor  $\mathbf{t} \in D \subset \mathbb{R}^n$  ( $D$  - Bereich) **eindeutig** ein Vektor  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^m$  zugeordnet, so nennt man diese Abbildung eine  $m$ -dimensionale **Vektorfunktion** von  $n$  unabhängigen Variablen.

Bezeichnungen:  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{t}) \quad \mathbf{t} \in D(\mathbf{f}) \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $f_j(t_1, \dots, t_n) \quad (j = 1, \dots, m)$ .

Es sei speziell  $n = 2$  und  $m = 3$ . Mit den Bezeichnungen  $\mathbf{f} = \mathbf{r}$ ,  $f_1 = x$ ,  $f_2 = y$ ,  $f_3 = z$ ,  $t_1 = u$ ,  $t_2 = v$  beschreibt die dreidimensionale **Vektorfunktion** von zwei unabhängigen Variablen

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}.$$

eine **Fläche**  $S$  im Raum. Wir definieren die **Vektorfunktion** auf dem Rechteck

$$R_{u,v} = \{(u, v) \mid a_1 < u < a_2 \wedge b_1 < v < b_2; a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\},$$

d.h.  $D(\mathbf{r}) = R_{u,v}$  und es gilt  $W(\mathbf{r}) = S$ .

**Beispiel 1.2 (Parameterdarstellungen von Flächen)**

(1) Kugeloberfläche  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Sei  $u$  der Winkel, den die Projektion der Strecke  $\overline{OP}$  auf die  $x, y$ -Ebene mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse einschließt ( $0 \leq u < 2\pi$ ), wobei der Winkel im mathematisch positiven Sinne gemessen wird, während  $v$  den Winkel, den die Strecke  $\overline{OP}$  mit der  $z$ -Achse einschließt ( $0 \leq v \leq \pi$ ), bezeichnet. Dann gilt:

$$x = a \cos u \sin v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \cos v$$

definiert auf dem Rechteck  $R_{u,v} = \{(u, v) \mid 0 \leq u < 2\pi \wedge 0 \leq v \leq \pi\}$ .

(2) Zylindermantelfläche  $x^2 + y^2 = a^2$

Der Winkel  $u$  habe diesselbe Bedeutung wie in Beispiel 1.2 (1). Dann gilt:

$$x = a \cos u, \quad y = a \sin u, \quad z = v,$$

definiert auf dem Rechteck  $R_{u,v} = \{(u, v) \mid 0 \leq u < 2\pi \wedge z_1 \leq v \leq z_2\}$ .

## 1.2 Skalar- und Vektorfelder

### Definition 1.3 (Skalarfeld, Vektorfeld)

1. Eine in  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  definierte skalare Funktion

$$U = U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$$

heißt **Skalarfeld (SF)** in  $D$  ( $n = 3, m = 1$ ).

2. Eine in  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  definierte Vektorfunktion

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\mathbf{i} + v_2(x, y, z)\mathbf{j} + v_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

heißt **Vektorfeld (VF)** in  $D$  ( $n = m = 3$ ).

- Eine **skalare Feldgröße** ist durch **einen Skalar** bestimmt.

**Skalarfelder** sind z.B. Temperaturfelder.

- Eine **vektorielle Feldgröße** ist durch **drei skalare Feldgrößen** bestimmt.

**Vektorfelder** sind z.B. Geschwindigkeitsfelder, Beschleunigungsfelder, Kraftfelder.

Wir betrachten nur zeitlich sich nicht ändernde Felder, so genannte **stationäre Felder**. Ändern sich die Felder außerdem noch nach der Zeit, so spricht man von **instationären Feldern**. Dann ist  $U = U(\mathbf{r}, t)$  und  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ .

### Wichtige Typen von Feldern

1° **Ebenes SF**:  $U = U(x, y)$ ,  $U$  hängt nicht von  $z$  ab.

2° **Zentralsymmetrisches SF**:  $U(\mathbf{r}) = f(r)$  mit  $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $U$  hängt nur vom Abstand des Punktes vom Koordinatenursprung ab.

3° **Axialsymmetrisches SF**:  $U = U(\sqrt{x^2 + y^2})$ ,  $U$  hängt nur vom Abstand des Punktes von der  $z$ -Achse ab.

4° **Ebenes VF**:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) = v_1(x, y)\mathbf{i} + v_2(x, y)\mathbf{j}$ ,  $v_3(x, y) = 0 \quad \forall (x, y)$ .

5° **Zentralsymmetrisches VF**:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$   $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ .

6° **Axialsymmetrisches VF**:  $\mathbf{v} = f(\sqrt{x^2 + y^2})(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ .

Betrachtet man einen Kreiszyylinder mit der  $z$ -Achse als Zylinderachse und dem Radius  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , dann hat  $\mathbf{v}$  in jedem Punkt der Zylinderoberfläche den gleichen Betrag der Größe  $|\mathbf{v}| = |f(\rho)|\rho$  und steht senkrecht auf ihr.

### Beispiel 1.3 (Skalarfeld, Vektorfeld)

- (1) Das **Potenzial**  $U$  einer sich im Koordinatenursprung befindlichen Punktladung  $Q$  wird durch ein **räumliches SF**

$$U = U(x, y, z) := \frac{Q}{4\pi\epsilon r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f(r) \quad \mathbf{r} \neq \Theta \quad (1.1)$$

beschrieben, wobei  $\epsilon$  die Dielektrizitätskonstante bezeichnet.

Ein **räumliches SF** lässt sich mit Hilfe von **Niveauflächen** veranschaulichen. Dies sind Flächen, die der Gleichung  $U(x, y, z) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  genügen. Ein **ebenes SF** kann man durch **Niveaulinien**, die die Gleichung  $U(x, y) = c$  erfüllen, darstellen.

Für das Temperaturfeld (1.1) ist  $c > 0$  zu wählen und man erhält als **Niveauflächen** eine Schar von Kugeln in Mittelpunktslage und dem Radius  $\frac{Q}{4\pi\epsilon c}$ .

- (2) Gegeben sei das **ebene VF**

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}. \quad (1.2)$$

Man kann ein **VF** veranschaulichen, indem man im Endpunkt jedes **Ortsvektors**  $\mathbf{r}$  einen Pfeil, der  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  repräsentiert, mit seinem Anfangspunkt anheftet. Eine weitere Veranschaulichung ist mit Hilfe von **Feldlinien** möglich. Dies sind Kurven, deren **Tangentenrichtung** in jedem Punkt mit der Richtung, die das **VF** in diesem Punkt vorgibt, übereinstimmt (Lösungen von Differentialgleichungssystemen).

Für das ebene Kraftfeld (1.2) erhält man als **Feldlinien** Hyperbeln.

**Voraussetzung:** Im Weiteren seien alle betrachteten Funktionen **zweifach stetig differenzierbar** im betrachteten Bereich  $D$ .

**Definition 1.4** Seien  $(x, y, z)$  die kartesischen Koordinaten eines Punktes  $P \in \mathbb{R}^3$ . Der Differentialoperator

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

heißt **Nabla-Operator (Vektorieller Differentialoperator)**.

## 1.3 Produkte des Nabla-Operators mit einem SF bzw. VF

**Definition 1.5** Sei  $U(x, y, z)$  ein **SF**. **Gradient** von  $U(x, y, z)$  heißt das **VF**

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

<b>SF</b> $U \implies$ <b>VF</b> $\text{grad } U$ $\text{grad } U = \nabla U$
---

**Bemerkung 1.1** Die Endpunkte der Ortsvektoren  $\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ , wobei  $d\mathbf{r}$  ein hinreichend kleiner vektorieller Zuwachs von  $\mathbf{r}$  ist, mögen in  $D(U)$  liegen. Für das totale Differential des SF  $U$  gilt:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \langle \text{grad } U, d\mathbf{r} \rangle \quad \text{mit} \quad d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

und  $dU$  gibt näherungsweise die Änderung des SF  $U$  bei Bewegung von  $\mathbf{r}$  nach  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  an. Falls  $d\mathbf{r}$  auf der Tangente einer Niveaulinie (in der Tangentialebene einer Niveaufläche) liegt, so ist  $\Delta_{d\mathbf{r}}U = U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = 0$ . Auf Grund unserer Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gilt  $\Delta_{d\mathbf{r}}U \approx dU$ . Dann ist  $dU = 0$ , also auch  $\langle \text{grad } U, d\mathbf{r} \rangle = 0$  und wir erhalten: Für jeden Punkt  $P_0 \in D(U)$  ist  $\text{grad } U$  ein Vektor, der auf der durch  $P_0$  hindurchgehenden Niveaufläche  $U(\mathbf{r}) = c$  senkrecht steht.

**Definition 1.6** Sei  $\mathbf{l}^0$  der zur Richtung  $l$  gehörige Einheitsvektor und  $U(\mathbf{r})$  ein SF. Wir legen durch den Endpunkt  $P_0$  des Ortsvektors  $\mathbf{r}_0$  in Richtung von  $\mathbf{l}$  eine Gerade  $l$ . Diese Gerade besitzt die PRG  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{l}^0$ , d.h. alle Punkte dieser Geraden besitzen Ortsvektoren der Gestalt  $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{l}^0$   $t \in \mathbb{R}$ . Betrachten wir  $U(\mathbf{r})$  nur auf dieser Geraden, so erhalten wir eine Funktion  $g(t) = U(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{l}^0)$ . Die Ableitung  $g'(0)$  heißt dann Ableitung von  $U(\mathbf{r})$  im Punkt  $P_0$  in Richtung  $l$  oder Richtungsableitung

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial l} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_l U}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U(\mathbf{r}_0 + \Delta t \mathbf{l}^0) - U(\mathbf{r}_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(\Delta t) - g(0)}{\Delta t} = g'(0).$$

In einem kartesischen Koordinatensystem, d.h.  $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$  und  $\mathbf{l}^0 = l_1\mathbf{i} + l_2\mathbf{j} + l_3\mathbf{k}$  gilt die Differentiationsregel:

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial l} = \frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial x} l_1 + \frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial y} l_2 + \frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial z} l_3 = \langle \text{grad } U(\mathbf{r}_0), \mathbf{l}^0 \rangle = |\text{grad } U(\mathbf{r}_0)| \cos \alpha,$$

wobei  $\alpha$  der Winkel zwischen  $\text{grad } U(\mathbf{r}_0)$  und  $\mathbf{l}^0$  ist.

**Bemerkung 1.2** Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial z}$  geben die Änderungsgeschwindigkeiten der Funktion  $U$  in Richtung der Koordinatenachsen an und sind Spezialfälle von Richtungsableitungen. Folglich gibt  $\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial l}$  die Änderungsgeschwindigkeit der Funktion  $U$  in einer beliebigen Richtung  $l$  an. Für den Einheitsvektor  $\mathbf{n}^0$  der Normalen zur Niveaufläche, der dieselbe Richtung wie  $\text{grad } U$  besitzt, gilt:

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial n} = \langle \text{grad } U(\mathbf{r}_0), \mathbf{n}^0 \rangle = |\text{grad } U(\mathbf{r}_0)| = \sqrt{\left(\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial z}\right)^2},$$

d.h. unter allen Richtungsableitungen von  $U$  in einem festen Punkt  $P_0$  besitzt  $\frac{\partial U}{\partial n}$  den größten Wert. Die Richtung des Gradienten in  $P_0$  ist die Richtung der größten Änderungsgeschwindigkeit von  $U(\mathbf{r})$  in  $P_0$ , also die Richtung, in der die  $U$ -Werte am stärksten wachsen.

**Definition 1.7** Ein **VF**  $\mathbf{v}$  heißt **konservatives Feld** oder **Potenzialfeld (PF)**, wenn ein **SF**  $U$  existiert, so dass gilt:  $\mathbf{v} = \text{grad } U = \nabla U$ . Dies ist gleichbedeutend mit

$$v_1 = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} \wedge v_2 = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y} \wedge v_3 = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} \iff v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz = dU.$$

Dabei heißt  $U$  das **Potenzial** von  $\mathbf{v}$ .

**Definition 1.8 (Divergenz, Quellenfreiheit)**

1. Sei  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  ein **VF**. **Divergenz** von  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  heißt das **SF**

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

<b>VF</b> $\mathbf{v}$	$\implies$	<b>SF</b> $\text{div } \mathbf{v}$	$\text{div } \mathbf{v} = \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle$
------------------------	------------	------------------------------------	---

2. Ein **VF**  $\mathbf{v}$  mit der Eigenschaft  $\text{div } \mathbf{v}(x, y, z) = 0 \quad \forall (x, y, z) \in D$  heißt **quellenfrei**.

3. Ist  $\mathbf{v}$  das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Flüssigkeitsströmung, so bedeutet  $\text{div } \mathbf{v}$  in einem Punkt die lokale **Quelldichte** des **VF**  $\mathbf{v}$  in diesem Punkt.

**Definition 1.9 (Rotation, Wirbelfreiheit)**

1. Sei  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  ein **VF**. **Rotation** von  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  heißt das **VF**

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

<b>VF</b> $\mathbf{v}$	$\implies$	<b>VF</b> $\text{rot } \mathbf{v}$	$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$
------------------------	------------	------------------------------------	---

2. Ein **VF**  $\mathbf{v}$  mit der Eigenschaft  $\text{rot } \mathbf{v}(x, y, z) = \Theta \quad \forall (x, y, z) \in D$  heißt **wirbelfrei**.

3. Ist  $\mathbf{v}$  das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Flüssigkeitsströmung, so bedeutet  $\text{rot } \mathbf{v}$  in einem Punkt die lokale **Wirbeldichte** des **VF**  $\mathbf{v}$  in diesem Punkt.

**Beispiel 1.4 (Richtungsableitung, Potenzialfeld)**

(1) Sei  $U(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $D(U) = \mathbb{R}^2$  ein **ebenes SF**,  $P_0 = (1, 1)$  und  $\mathbf{l} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ . Dann ist

$$\frac{\partial U(1, 1)}{\partial l} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U(1 + \Delta t l_1, 1 + \Delta t l_2) - U(1, 1)}{\Delta t} = 2\sqrt{2} = \langle \nabla U(1, 1), \mathbf{l}^0 \rangle.$$

(2) Für das **Newtonsche Potenzial** eines **zentralsymmetrischen Kraftfeldes** gilt:  
 $U(\mathbf{r}) = f(r) = \frac{1}{r}$ ,  $D(f) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ,  $\text{grad } U(\mathbf{r}) = \nabla U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r^3}(\mathbf{x}\mathbf{i} + \mathbf{y}\mathbf{j} + \mathbf{z}\mathbf{k})$ .  
 Für die **Richtungsableitung** in einem Punkt  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  in Richtung des **Einheitsvektors**  $\mathbf{l}^0 = l_1\mathbf{i} + l_2\mathbf{j} + l_3\mathbf{k}$  erhält man

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial l} = -\frac{1}{r_0^3}(x_0 l_1 + y_0 l_2 + z_0 l_3).$$

- (3) Das **SF**  $U(\mathbf{r})$  sei ein Temperaturfeld. Die **Niveauflächen** sind Flächen konstanter Temperatur. In jedem Punkt  $P_0$  ist  $\nabla U$  ein Vektor, der senkrecht auf der durch diesen Punkt hindurchgehenden **Niveaufläche** steht und in die Richtung des stärksten Temperaturwachstums zeigt. Je stärker  $U$  wächst, desto größer ist  $|\nabla U|$ .
- (4) Das Schwerfeld der Erde  $\mathbf{K} = -g\mathbf{k}$  ( $g$  Erdbeschleunigung) ist ein **PF**, denn für das **SF**  $U = -gz$  gilt  $\mathbf{K} = \nabla U$ . Ferner ist  $\operatorname{div} \mathbf{K} = 0$  und  $\operatorname{rot} \mathbf{K} = \Theta$ .

## 1.4 Nabla-Rechnung

### Eigenschaften des Gradienten

- 1°  $\nabla(U_1 + U_2) = \nabla U_1 + \nabla U_2$   
 2°  $\nabla(\lambda U) = \lambda \nabla U \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$   
 3°  $\nabla(U_1 U_2) = U_1 \nabla U_2 + U_2 \nabla U_1$   
 4°  $\nabla f(U) = f'(U) \nabla U$  für die mittelbare Funktion  $f(U(x, y, z))$

### Eigenschaften der Divergenz

- 1°  $\langle \nabla, (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \rangle = \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle + \langle \nabla, \mathbf{w} \rangle$   
 2°  $\langle \nabla, (\lambda \mathbf{v}) \rangle = \lambda \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$   
 3°  $\langle \nabla, (U \mathbf{v}) \rangle = U \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \nabla U \rangle$   
 Beachte:  $\langle \nabla, \mathbf{v} \rangle = \operatorname{div} \mathbf{v}$  ist ein **SF**, aber  $\langle \mathbf{v}, \nabla \rangle$  ist ein Operator.  
 4°  $\langle \nabla, (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{w}, \operatorname{rot} \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{w} \rangle$

### Eigenschaften der Rotation

- 1°  $\nabla \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \nabla \times \mathbf{v} + \nabla \times \mathbf{w}$   
 2°  $\nabla \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda (\nabla \times \mathbf{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$   
 3°  $\nabla \times (U \mathbf{v}) = U (\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla U)$

**Beispiel 1.5** Die betrachteten **SF** und **VF** seien zentralsymmetrisch.

- (1)  $\operatorname{grad} f(r) = \nabla f(r) = f'(r) \nabla r = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$   
 (2)  $\operatorname{div} [f(r) \mathbf{r}] = \langle \nabla, (f(r) \mathbf{r}) \rangle = f(r) \langle \nabla, \mathbf{r} \rangle + \langle \mathbf{r}, \nabla f(r) \rangle = 3f(r) + f'(r)r$   
 (3)  $\operatorname{rot} [f(r) \mathbf{r}] = \nabla \times (f(r) \mathbf{r}) = f(r) (\nabla \times \mathbf{r}) - \mathbf{r} \times \nabla f(r) = \nabla f(r) \times \mathbf{r} = \Theta$

### Zweifache Anwendung des Nabla-Operators

- 1°  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \langle \nabla, \nabla \times \mathbf{v} \rangle = 0 \implies$  Jedes **Wirbelfeld**  $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$  ist **quellenfrei**.  
 2°  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \nabla \times \nabla U = \Theta \implies$  Jedes **PF**  $\mathbf{v} = \nabla U$  ist **wirbelfrei**.

## 2 Integralrechnung für reelle Funktionen mehrerer reeller Variablen

### 2.1 Ebene und räumliche Bereichsintegrale

Das Integrationsintervall wird durch eine ebene bzw. räumliche Punktmenge ersetzt.

**Voraussetzungen:** Die betrachteten ebenen (räumlichen) Punkt Mengen  $B$  mögen einen Flächeninhalt (ein Volumen) besitzen.

Das **ebene Bereichsintegral**  $\iint_B f(x, y) db$  (**räumliche Bereichsintegral**  $\iiint_B f(x, y, z) db$ ) wird wie im Falle  $n = 1$  über einen **Grenzwert** definiert.

#### Definition 2.1 (Ebene und räumliche Normalbereiche)

1. Seien  $y_1(x), y_2(x)$  **stetig** in  $[x_1, x_2]$ ,  $y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \quad \forall x \in [x_1, x_2]$ . Die Punktmenge

$$B_x = \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2 \wedge y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

heißt **ebener Normalbereich** bezüglich der  $x$ -Achse.

2. Seien  $x_1(y), x_2(y)$  **stetig** in  $[y_1, y_2]$ ,  $x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \quad \forall y \in [y_1, y_2]$ . Die Punktmenge

$$B_y = \{(x, y) \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \wedge y_1 \leq y \leq y_2\}$$

heißt **ebener Normalbereich** bezüglich der  $y$ -Achse.

3. Seien  $z_1(x, y), z_2(x, y)$  **stetig** in  $B_x$ ,  $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in B_x$ . Die Punktmenge

$$B_{xy} = \{(x, y, z) \mid x_1 \leq x \leq x_2 \wedge y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \wedge z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

heißt **räumlicher Normalbereich** bezüglich der  $xy$ -Ebene, wobei  $B_x$  ein **ebener Normalbereich** bezüglich der  $x$ -Achse ist. Analog definiert man 5 weitere Typen räumlicher Normalbereiche.

#### Beispiel 2.1 (Ebene und räumliche Normalbereiche)

- (1) Ein Rechteck mit achsenparallelen Seiten

$$R = \{(x, y) \mid a_1 \leq x \leq a_2 \wedge b_1 \leq y \leq b_2\}$$

ist ein Spezialfall eines **ebenen Normalbereichs** bezüglich beider Koordinatenachsen.

- (2) Ein Quader mit achsenparallelen Kanten

$$Q = \{(x, y, z) \mid a_1 \leq x \leq a_2 \wedge b_1 \leq y \leq b_2 \wedge c_1 \leq z \leq c_2\}$$

ist ein Spezialfall eines **räumlichen Normalbereichs** bezüglich aller drei Koordinatenebenen.

$$(3) B_x = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2\}$$

$$B_y = \{(x, y) \mid \sqrt{y} \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$$

$$(4) B_{xy} = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2 \wedge 0 \leq z \leq xy\}$$

**Theorem 2.1 (Existenz von Bereichsintegralen)** Sei  $B$  ein aus endlich vielen Normalbereichen zusammengesetzter ebener (räumlicher) Bereich und  $f$  eine in  $B$  definierte und stetige Funktion. Dann existiert das ebene (räumliche) Bereichsintegral und es gelten die Berechnungsformeln:

1. Ist  $B_x$  ein **ebener Normalbereich** bezüglich der  $x$ -Achse und  $f$  stetig in  $B_x$ , so ist

$$\iint_{B_x} f(x, y) \, db = \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Das (zweifache) Integral auf der rechten Seite berechnet sich wie folgt

- 1° Die Funktion  $f(x, y)$  wird unbestimmt nach  $y$  integriert (dabei wird  $x$  als konstant angesehen).
- 2° Für  $y$  werden die Grenzen  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  eingesetzt.
- 3° Der Integrand ist nach dem Einsetzen der Integrationsgrenzen bezüglich  $y$  nur noch eine Funktion von  $x$  und wird unbestimmt nach  $x$  integriert.
- 4° Für  $x$  werden die Grenzen  $x_1$  und  $x_2$  eingesetzt.

2. Ist  $B_y$  ein **ebener Normalbereich** bezüglich der  $y$ -Achse und  $f$  stetig in  $B_y$ , so ist

$$\iint_{B_y} f(x, y) \, db = \int_{y_1}^{y_2} \left( \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Das (zweifache) Integral auf der rechten Seite wird analog wie oben berechnet.

3. Ist  $B_{xy}$  ein **räumlicher Normalbereich** bezüglich der  $xy$ -Ebene und  $f$  stetig in  $B_{xy}$ , so ist

$$\iiint_{B_{xy}} f(x, y, z) \, db = \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left( \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx.$$

Das (dreifache) Integral auf der rechten Seite berechnet sich sukzessive wie oben.

**Beispiel 2.2 (Ebene und räumliche Bereichsintegrale)**

$$(1) f(x, y) = xy \quad B_x = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2\}$$

$$\iint_{B_x} f(x, y) \, db = \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} xy \, dy \right) dx = \frac{1}{12}$$

$$(2) f(x, y, z) = x y z \quad B_{xy} = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2 \wedge 0 \leq z \leq xy\}$$

$$\iiint_{B_{xy}} f(x, y, z) \, db = \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} \left( \int_0^{xy} x y z \, dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{96}$$

## 2.2 Kurvenintegrale

Das Integrationsintervall wird durch ein ebenes bzw. räumliches Kurvenstück ersetzt.

**Voraussetzungen:** Wir betrachten ebene Kurven bzw. Raumkurven  $C$ , die eine endliche Länge besitzen mögen. Die Kurve sei durch eine Parameterdarstellung, deren Koordinatenfunktionen auf einem abgeschlossenen Intervall **stetig differenzierbar** sind, gegeben. In diesem Falle nennen wir  $C$  eine **glatte Kurve**.

Wir unterscheiden **Kurvenintegrale 1. Art** (Integrale über die Länge der Kurve) und **Kurvenintegrale 2. Art** (Integrale über die Projektionen auf die drei Koordinatenachsen). Beide werden wieder über einen Grenzwert definiert und zur Berechnung auf **Riemannsche Integrale** zurückgeführt.

**Theorem 2.2 (Existenz von Kurvenintegralen)** *Es sei  $C$  eine glatte Raumkurve mit einer Parameterdarstellung  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , dem Anfangspunkt  $P_1$  und dem Endpunkt  $P_2$ . Ferner sei  $f(x, y, z)$  ( $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x, y, z)$ ) ein in den Punkten der Kurve  $C$  definiertes und stetiges SF (VF). Dann existiert das **Kurvenintegral 1. Art**  $\int_C f(x, y, z) \, dl$ , welches nicht davon abhängt, ob die Kurve von  $P_1$  nach  $P_2$  oder umgekehrt durchlaufen wird. Dabei bezeichnet  $dl$  das Differenzial der Länge  $l$  des Kurvenstücks. Außerdem existiert das **Kurvenintegral 2. Art***

$$\int_C v_1(x, y, z) \, dx + v_2(x, y, z) \, dy + v_3(x, y, z) \, dz = \int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle,$$

welches jedoch beim Durchlauf der Kurve in entgegengesetzter Richtung, d.h. von  $P_2$  nach  $P_1$  sein Vorzeichen ändert. Es gelten folgende Rückführungsformeln:

$$\int_C f(x, y, z) \, dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt, \quad (2.1)$$

$$\int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = \int_{t_1}^{t_2} [v_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + v_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + v_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt. \quad (2.2)$$

Ist  $C$  eine **glatte, ebene Kurve** mit einer **Parameterdarstellung**  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$   $t \in [t_1, t_2]$ , so lauten die Rückführungsformeln

$$\int_C f(x, y) \, dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt, \quad (2.3)$$

$$\int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = \int_{t_1}^{t_2} [v_1(x(t), y(t))x'(t) + v_2(x(t), y(t))y'(t)] dt. \quad (2.4)$$

Ist eine **ebene Kurve**  $C$  in einer expliziten Darstellung  $y = \varphi(x)$  gegeben, wobei die Funktion  $\varphi$  in einem Intervall  $[x_1, x_2]$  **stetig differenzierbar** ist, so setzt man  $x = t$ ,  $y = \varphi(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$  und erhält aus (2.3) bzw. (2.4)

$$\int_C f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(t, \varphi(t)) \sqrt{1 + \varphi'(t)^2} dt, \quad (2.5)$$

$$\int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = \int_{t_1}^{t_2} [v_1(t, \varphi(t)) + v_2(t, \varphi(t))\varphi'(t)] dt. \quad (2.6)$$

In den rechten Seiten von (2.1) – (2.6) stehen **Riemannsche Integrale**.

### Beispiel 2.3 (Kurvenintegrale 1. und 2. Art)

(1)  $f(x, y) = x^2$      $C : y = \varphi(x) = \ln x$ ,     $[x_1, x_2] = [1, 2]$  Aus (2.5) erhält man

$$\int_C f(x, y) dl = \int_1^2 t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt = \int_1^2 t \sqrt{t^2 + 1} dt = \frac{1}{3} [5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}].$$

(2)  $v_1(x, y) = y^2$ ,     $v_2(x, y) = y$      $C : y = 2x - 1$ ,  $P_1 = (1, 1)$ ,  $P_2 = (3, 5)$  Berechnen Sie das **Kurvenintegral 2. Art** bez. beider Durchlaufrichtungen. Ergebnis:  $\pm \frac{98}{3}$ .

(3) Durch das ebene Kraftfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = k \mathbf{r}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  wird bei Verschiebung eines Massenpunktes von  $P_1 = (x_1, y_1)$  nach  $P_2 = (x_2, y_2)$  längs einer beliebigen glatten Kurve  $C$  mit einer Parameterdarstellung  $\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j}$  und dem Anfangspunkt  $P_1$  und dem Endpunkt  $P_2$  eine Arbeit  $W$  verrichtet, die sich durch ein **Kurvenintegral 2. Art** berechnen lässt. Es seien  $t_1$  ( $t_2$ ) die  $P_1$  ( $P_2$ ) entsprechenden Parameterwerte.

$$\begin{aligned} W &= \int_C \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}), d\mathbf{r} \rangle = k \int_{t_1}^{t_2} [x(t)x'(t) + y(t)y'(t)] dt \\ &= k \int_{t_1}^{t_2} d\left[\frac{[x(t)]^2}{2} + \frac{[y(t)]^2}{2}\right] = \frac{k}{2} ([x(t_2)]^2 + [y(t_2)]^2 - [x(t_1)]^2 - [y(t_1)]^2). \end{aligned}$$

Die Arbeit hängt somit nur von der Lage des Anfangspunktes  $P_1$  und des Endpunktes  $P_2$  der Kurve ab und nicht von der diese Punkte verbindenden Kurve  $C$ .

**Theorem 2.3** Sei  $D \in \mathbb{R}^3$  ein **einfach zusammenhängender Bereich**,  $C \subset D$  eine **glatte Kurve** mit dem Anfangspunkt  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  sowie dem Endpunkt  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  und  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  eine **stetige Vektorfunktion** in  $D$ . Das **Kurvenintegral 2. Art** (für eine ebene Kurve oder eine Raumkurve  $C$ )  $\int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle$  ist genau dann vom Weg zwischen  $P_1$  und  $P_2$  unabhängig, wenn  $\mathbf{v} = \nabla U$ , d.h., wenn  $\mathbf{v}$  ein **PF** ist. Dann gilt:

$$\int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = \int_C \langle \nabla U, d\mathbf{r} \rangle = \int_{P_1}^{P_2} dU = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1).$$

Diese Eigenschaft heißt **Wegunabhängigkeit** des **Kurvenintegrals 2.Art**. Für eine geschlossene Kurve erhält man  $\oint_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = 0$ .

**Theorem 2.4** Ein **VF**  $\mathbf{v}(x, y, z)$  ist ein **PF** genau dann, wenn in einem **einfach zusammenhängenden Bereich** gilt

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial z} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{rot } \mathbf{v} = \Theta.$$

Ist die letzte Bedingung erfüllt, so kann man das **Potenzial**  $U(x, y, z)$  nach der Formel

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_{x_0}^x v_1(r, y, z) dr + \int_{y_0}^y v_2(x_0, s, z) ds + \int_{z_0}^z v_3(x_0, y_0, t) dt + C \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial U(r, y, z)}{\partial x} dr + \int_{y_0}^y \frac{\partial U(x_0, s, z)}{\partial y} ds + \int_{z_0}^z \frac{\partial U(x_0, y_0, t)}{\partial z} dt + C \end{aligned} \quad (2.7)$$

berechnen, wobei  $(x_0, y_0, z_0) \in D$  ein fixierter Punkt und  $C$  die Integrationskonstante ist.

Die Formel (2.7) ist eine Verallgemeinerung der unbestimmten Integration. Die **Potenzialfunktion**  $U(x, y, z)$  entspricht der Stammfunktion.

**Beispiel 2.4** Man berechne das **Potenzial**  $U(x, y, z)$  des **VF**  $\mathbf{v} = e^y \cos z \mathbf{i} + x e^y \cos z \mathbf{j} - x e^y \sin z \mathbf{k}$ . Es ist  $\text{rot } \mathbf{v} = \Theta$ , d.h.  $\mathbf{v}$  ist ein **Potenzialfeld**.

**1. Lösungsweg:** Wir wählen  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$  und erhalten gemäß (2.7)

$$U(x, y, z) = \int_0^x e^y \cos z dr + \int_0^y 0e^s \cos z ds + \int_0^z (-0e^0 \sin t) dt + C = x e^y \cos z + C.$$

Man überprüft leicht, dass  $\nabla U = \mathbf{v}$  gilt. Durch Vorgabe eines Wertes für das **Potenzial** im Punkt  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$  bestimmt man  $C$ .

**2. Lösungsweg:** (Methode des schrittweisen Integrierens) Da  $\mathbf{v}$  ein **Potenzialfeld** ist, gilt:

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = e^y \cos z \quad \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} = x e^y \cos z \quad \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} = -x e^y \sin z. \quad (2.8)$$

Integration der ersten Beziehung in (2.8) nach  $x$  ergibt

$$U(x, y, z) = x e^y \cos z + C(y, z). \quad (2.9)$$

Partielle Differentiation nach  $y$  und Einsetzen in die zweite Beziehung in (2.8) führt auf  $x e^y \cos z + C_y(y, z) = x e^y \cos z$ , d.h.  $C_y(y, z) = 0$  und damit  $C(y, z) = C(z)$ . Somit folgt aus (2.9)  $U(x, y, z) = x e^y \cos z + C(z)$ . Analoges Vorgehen in der letzten Beziehung von (2.8) liefert das Ergebnis.

## 2.3 Oberflächenintegrale

Das ebene Integrationsgebiet wird durch ein räumliches gekrümmtes Flächenstück ersetzt.

**Voraussetzungen:** Die betrachtete gekrümmte Fläche  $S$  möge einen Flächeninhalt besitzen. Außerdem sei die Fläche **zweiseitig**. Es gibt auch **einseitige** Flächen, z.B. das Möbiussche Band. Die Fläche sei durch eine Parameterdarstellung, deren Koordinatenfunktionen auf einem ebenen Normalbereich  $B$  **stetig differenzierbar** sind, gegeben. In diesem Falle nennen wir  $S$  eine **glatte Fläche**.

Wir unterscheiden **Oberflächenintegrale 1. Art** (Integrale über den Flächeninhalt der Fläche) und **Oberflächenintegrale 2. Art** (Integrale über die Projektionen auf die drei Koordinatenebenen). Beide werden wieder über einen Grenzwert definiert und zur Berechnung auf **ebene Bereichsintegrale** zurückgeführt.

**Theorem 2.5 (Existenz von Oberflächenintegralen)** *Es sei  $S$  eine glatte zweiseitige Fläche mit einer Parameterdarstellung  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in B \subset \mathbb{R}^2$ . Ferner sei  $f(x, y, z)$  ( $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x, y, z)$ ) ein in den Punkten der Fläche  $S$  definiertes und stetiges SF (VF). Dann existiert das **Oberflächenintegral 1. Art**  $\iint_S f(x, y, z) dS$ , welches nicht von der Seite der Fläche abhängt. Dabei bezeichnet  $dS$  das Differential des Flächeninhaltes des Flächenstücks. Außerdem existiert das **Oberflächenintegral 2. Art***

$$\iint_S v_1(x, y, z) dy dz + v_2(x, y, z) dz dx + v_3(x, y, z) dx dy = \iint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle,$$

welches jedoch beim Übergang zur anderen Seite der Fläche sein Vorzeichen ändert. Dabei bezeichnet  $d\mathbf{w} = dy dz \mathbf{i} + dz dx \mathbf{j} + dx dy \mathbf{k}$  ein vektorielles Flächenelement der Fläche  $S$ . Es gelten folgende Rückführungsformeln:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_B f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} db \quad (2.10)$$

mit

$$E = (x_u)^2 + (y_u)^2 + (z_u)^2 \quad G = (x_v)^2 + (y_v)^2 + (z_v)^2 \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$

$$\iint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle = \iint_B \begin{vmatrix} v_1(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) & v_2(x(u, v), \dots) & v_3(x(u, v), \dots) \\ x_u(u, v) & y_u(u, v) & z_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix} db. \quad (2.11)$$

Die Seite einer Fläche wird durch den Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}^0$  auf der Tangentialebene in den Flächenpunkten charakterisiert. Ist  $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}$  die **Vektorfunktion**, deren Koordinatenfunktionen die **Parameterdarstellung** der Fläche ergeben, so gilt  $\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$ . Ist  $\mathbf{n}^0$  bei einer geschlossenen (nichtgeschlossenen) Fläche nach außen (oben) gerichtet, so spricht man von der Außenseite (Oberseite) der Fläche. Ist er bei einer geschlossenen (nichtgeschlossenen) Fläche nach innen (unten) gerichtet, so spricht man von der Innenseite (Unterseite) der Fläche. Der Übergang zur anderen

Seite der Fläche wird durch Vertauschen der Reihenfolge von  $u$  und  $v$  in der **Parameterdarstellung** der Fläche erreicht. Man erhält aus  $\mathbf{r}(u, v)$  die Parameterdarstellung  $\mathbf{r}(v, u)$  und den entgegengesetzt zu  $\mathbf{n}^0$  gerichteten Normaleneinheitsvektor  $-\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u}{|\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u|}$ .

Ist eine Fläche  $S$  in einer expliziten Darstellung  $z = \varphi(x, y)$  gegeben, wobei die Funktion  $\varphi$  in einem ebenen Normalbereich  $B$  stetig differenzierbar ist, so setzt man  $x = u$ ,  $y = v$ ,  $z = \varphi(u, v)$ ,  $(u, v) \in B$  und erhält aus (2.10) und (2.11)

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_B f(u, v, \varphi(u, v)) \sqrt{1 + [\varphi_u(u, v)]^2 + [\varphi_v(u, v)]^2} db, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle &= \iint_B \begin{vmatrix} v_1(u, v, \varphi(u, v)) & v_2(u, \dots) & v_3(u, \dots) \\ 1 & 0 & \varphi_u(u, v) \\ 0 & 1 & \varphi_v(u, v) \end{vmatrix} db. \\ &= \iint_B [-v_1(u, v, \varphi(u, v))\varphi_u(u, v) - v_2(u, v, \varphi(u, v))\varphi_v(u, v) + v_3(u, v, \varphi(u, v))] db. \end{aligned} \quad (2.13)$$

In (2.11) und (2.13) sind beim Übergang zur anderen Seite der Fläche die beiden letzten Zeilen in der Determinante zu vertauschen.

In den rechten Seiten von (2.10) – (2.13) stehen ebene Bereichsintegrale.

In der Vektoralgebra heißt das **Spatprodukt**  $(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c})$  der **konstanten Vektoren**  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  **Vektorfluss** des **Vektors**  $\mathbf{c}$  durch die Parallelogrammfläche, die durch die **Vektoren**  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannt wird, in Richtung von  $\mathbf{c}$ . (vgl. Mathematik I für Wirtschaftsingenieure Abschnitt 1.1.2). Ist jetzt  $\mathbf{v}$  ein beliebiges **stetiges VF** und  $S$  eine beliebige **glatte zweiseitige Fläche**, so nennt man analog das **Oberflächenintegral 2. Art**  $\iint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle$  **Vektorfluss** des **Vektors**  $\mathbf{v}$  durch die Fläche  $S$  in Richtung von  $\mathbf{v}$ .

### Beispiel 2.5 (Oberflächenintegrale 1. und 2. Art)

(1)  $f(x, y, z) = v_1(x, y, z) = v_2(x, y, z) = v_3(x, y, z) = 1 \quad \forall (x, y, z) \in S$  mit

$$S : z = 1 - x - y, \quad x \in [0, 1/2] \quad y \in [0, 1/2]$$

$$1^\circ \quad \iint_S f(x, y, z) dS = \sqrt{3} \int_0^{1/2} \left( \int_0^{1/2} du \right) dv = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$2^\circ \quad \iint_S v_1(x, y, z) dy dz + v_2(x, y, z) dz dx + v_3(x, y, z) dx dy = \int_0^{1/2} \left( \int_0^{1/2} 3 du \right) dv = \frac{3}{4}$$

(2) Berechnen Sie den Flächeninhalt einer Kugeloberfläche mit dem Radius  $a$  und dem Mittelpunkt in  $(0, 0, 0)$ .

Mit der Parameterdarstellung  $x(u, v) = a \cos u \sin v$ ,  $y(u, v) = a \sin u \sin v$ ,  $z(u, v) = a \cos v$ ,  $(u, v) \in B = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi\}$ ,  $E = a^2 \sin^2 v$ ,  $G = a^2$ ,  $F = 0$  ergibt sich

$$\iint_S dS = \iint_B \sqrt{EG} db = a^2 \int_0^{2\pi} du \int_0^\pi dv = 2\pi a^2 [-\cos v]_0^\pi = 4\pi a^2.$$

## 2.4 Variablensubstitution in Bereichsintegralen

### 2.4.1 Krummlinige Koordinatensysteme

**Geradlinige Koordinatensysteme der Ebene (des Raumes)** sind die **rechtwinkligen** oder **kartesischen Koordinaten** und die **schiefwinkligen Koordinaten**. Im ersten Fall bilden beliebige zwei Koordinatenachsen einen rechten Winkel, im zweiten Fall gibt es wenigstens zwei Koordinatenachsen, die keinen rechten Winkel bilden.

Die **krummlinigen Koordinatensysteme der Ebene (des Raumes)** sind Verallgemeinerungen der **geradlinigen**. Die bekanntesten **krummlinigen Koordinatensysteme** sind:

#### 1. (ebene) Polarkoordinaten

Ein beliebiger Punkt  $P$  der Ebene kann, ausgehend von einem rechtwinkligen Koordinatensystem, bestimmt werden durch

- 1° den Abstand  $r \geq 0$  des Punktes  $P$  vom Koordinatenursprung  $O$ ,
- 2° den Winkel  $\varphi$ , den die Strecke  $\overline{OP}$  mit der **Polarachse** einschließt ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ). Der Winkel wird im mathematisch positiven Drehsinn gemessen.

Ein Punkt  $P$  besitzt in **(ebenen) Polarkoordinaten** die Darstellung  $P = (r, \varphi)$ .

Der Pol  $O$  ist durch  $r = 0$  gekennzeichnet, ihm wird kein **Polarwinkel** zugeordnet.

#### Zusammenhang zwischen kartesischen und Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \tan \varphi &= \frac{y}{x} \quad \text{für } x \neq 0, & \frac{1}{\tan \varphi} &= \frac{x}{y} \quad \text{für } y \neq 0 \end{aligned}$$

#### 2. Kugelkoordinaten (räumliche Polarkoordinaten)

Ein beliebiger Raumpunkt  $P$  kann, ausgehend von einem rechtwinkligen Koordinatensystem, bestimmt werden durch

- 1° den Abstand  $r \geq 0$  des Punktes  $P$  vom Koordinatenursprung  $O$ ,
- 2° den Winkel  $\varphi$ , den die Projektion der Strecke  $\overline{OP}$  auf die  $xy$ -Ebene mit der positiven  $x$ -Achse einschließt ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ), wobei der Winkel im mathematisch positiven Sinne gemessen wird,
- 3° den Winkel  $\theta$ , den die Strecke  $\overline{OP}$  mit der  $z$ -Achse einschließt ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ).

Ein Punkt  $P$  besitzt in **Kugelkoordinaten** die Darstellung  $P = (r, \varphi, \theta)$ .

#### Zusammenhang zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta, & y &= r \sin \varphi \sin \theta, & z &= r \cos \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & \tan \varphi &= \frac{y}{x} \quad \text{für } x \neq 0, & \frac{1}{\tan \varphi} &= \frac{x}{y} \quad \text{für } y \neq 0, \\ & & \cos \theta &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

### 3. Zylinderkoordinaten

Ein beliebiger Raumpunkt  $P$  kann, ausgehend von einem rechtwinkligen Koordinatensystem, bestimmt werden durch

- 1° den Abstand  $r \geq 0$  des Punktes  $P'$  vom Koordinatenursprung  $O$ , wobei  $\overline{OP'}$  die Projektion der Strecke  $\overline{OP}$  auf die  $xy$ -Ebene darstellt,
- 2° den Winkel  $\varphi$ , den die Projektion der Strecke  $\overline{OP'}$  auf die  $xy$ -Ebene mit der positiven  $x$ -Achse einschließt ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ), wobei der Winkel im mathematisch positiven Sinne gemessen wird,
- 3° den Abstand  $z$  des Punktes  $P$  von der  $xy$ -Ebene ( $-\infty < z < +\infty$ ). Dabei ist  $z$  positiv (negativ), wenn die Ebene durch den Punkt  $P$ , die parallel zur  $xy$ -Ebene verläuft, die  $z$ -Achse im positiven (negativen) Teil schneidet.

Ein Punkt  $P$  besitzt in **Zylinderkoordinaten** die Darstellung  $P = (r, \varphi, z)$ .

#### Zusammenhang zwischen kartesischen und Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, & z &= z \\r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \tan \varphi &= \frac{y}{x} \quad \text{für } x \neq 0, & \frac{1}{\tan \varphi} &= \frac{x}{y} \quad \text{für } y \neq 0\end{aligned}$$

#### Beispiel 2.6 Umrechnung von Koordinaten eines Punktes

- (1) Gegeben seien die **kartesischen Koordinaten** des Punktes  $P = (3, -4, -12)$ . Berechnen Sie die **Kugelkoordinaten**.

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13, \\ \varphi &= 306.87^\circ \quad \text{denn} \quad \tan \varphi = \frac{-4}{3}, \\ \theta &= 157.38^\circ \quad \text{denn} \quad \cos \theta = \frac{-12}{13}.\end{aligned}$$

- (2) Gegeben seien die **Zylinderkoordinaten** des Punktes  $P = (3, 330^\circ, 1)$ . Berechnen Sie die **kartesischen Koordinaten**.

$$\begin{aligned}x &= 3 \cos(330^\circ) = \frac{3}{2} \sqrt{3}, \\ y &= 3 \sin(330^\circ) = -\frac{3}{2}, \\ z &= 1.\end{aligned}$$

#### 2.4.2 Substitutionsformeln für Bereichsintegrale

Wir verallgemeinern die **Substitutionsformel** für das bestimmte **Riemannsche Integral** ( $n = 1$ ) (vgl. Mathematik I für Wirtschaftsingenieure Abschnitt 3.10.2): Es sei  $x = x(u)$  **stetig differenzierbar** in  $D(x) = [a_0, b_0]$ ,  $f(x)$  **stetig** in  $W(x)$  und es gelte

$W(x) \subseteq D(f) = [a, b]$  sowie  $x(a_0) = a$   $x(b_0) = b$ . Dann gilt mit der Substitutionsfunktion  $x = x(u)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a_0}^{b_0} f(x(u))x'(u) du.$$

Problem: Wie ist für **Bereichsintegrale** das Differenzial  $x'(u) du$  in der Formel für  $n = 1$  zu ersetzen?

Wir betrachten für  $n = 2$  ( $n = 3$ ) eine **Vektorfunktion**  $\mathbf{r}_2$  ( $\mathbf{r}_3$ ) mit den Koordinatenfunktionen  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  ( $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$ ).

Die Matrix, gebildet aus den partiellen Ableitungen der **Vektorfunktion** heißt **Jacobi-Matrix**. Ihre Determinante nennt man **Jacobian**. Wir bezeichnen diese Funktionaldeterminante durch

$$J_2 = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \quad \left( J_3 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \right)$$

und mit  $|J_2|$  ( $|J_3|$ ) ihren absoluten Betrag.

### Substitutionsformel für ebene Bereichsintegrale

Es existiere  $\iint_B f(x, y) db$ . Ferner sei  $B_1$  ein **ebener Normalbereich** bezüglich der  $u$ -Achse in der  $uv$ -Ebene. Die **Vektorfunktion**  $\mathbf{r}_2$  bilde  $B_1$  (gegebenenfalls bis auf Randpunkte von  $B_1$ ) **eindeutig** auf  $B$  ab. Ihre Koordinatenfunktionen mögen **stetige partielle Ableitungen** besitzen, wobei  $J_2 \neq 0$  ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \iint_B f(x, y) db &= \iint_{B_1} f(x(u, v), y(u, v)) |J_2| db_1 \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \left( \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} f(x(u, v), y(u, v)) |J_2| dv \right) du. \end{aligned}$$

### Substitutionsformel für räumliche Bereichsintegrale

Es existiere  $\iiint_B f(x, y, z) db$ . Ferner sei  $B_1$  ein **räumlicher Normalbereich** bezüglich der  $uv$ -Ebene im  $uvw$ -Raum. Die **Vektorfunktion**  $\mathbf{r}_3$  bilde  $B_1$  (gegebenenfalls bis auf Randpunkte von  $B_1$ ) **eindeutig** auf  $B$  ab. Ihre Koordinatenfunktionen mögen **stetige partielle Ableitungen** besitzen, wobei  $J_3 \neq 0$  ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \iiint_B f(x, y, z) db &= \iiint_{B_1} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J_3| db_1 \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \left( \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} \left( \int_{w_1(u, v)}^{w_2(u, v)} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J_3| dw \right) dv \right) du. \end{aligned}$$

Speziell gilt für

**Polarkoordinaten**  $J_2 = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = r \implies J_2 = |J_2| = r$  und

$$\iint_B f(x, y) \, db = \iint_{B_1} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, db_1$$

**Kugelkoordinaten**  $J_3 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = -r^2 \sin \theta \implies |J_3| = r^2 \sin \theta \geq 0$  für  $\theta \in [0, \pi]$  und

$$\iiint_B f(x, y, z) \, db = \iiint_{B_1} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, db_1$$

**Zylinderkoordinaten**  $J_3 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = r \implies J_3 = |J_3| = r$  und

$$\iiint_B f(x, y, z) \, db = \iiint_{B_1} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r \, db_1.$$

**Beispiel 2.7** Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit dem Radius  $a$  und dem Mittelpunkt in  $(0, 0, 0)$ .

Das Kugelvolumen kann durch ein **räumliches Bereichsintegral** mit dem Integranden  $f(x, y, z) = 1 \quad \forall (x, y, z) \in B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$  berechnet werden. Der Übergang zu Kugelkoordinaten vereinfacht die Integration. Mit

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta$$

und  $B_1 = \{(r, \varphi, \theta) \mid r \in [0, a], \varphi \in [0, 2\pi[, \theta \in [0, \pi]\}$  erhält man

$$\begin{aligned} \iiint_B db &= \iiint_{B_1} r^2 \sin \theta \, db_1 = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \left( \int_0^a r^2 \sin \theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^a r^2 \, dr = 2\pi [-\cos \theta]_0^\pi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^a = \frac{4\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

## 2.5 Die Integralsätze

Man kann die **Integralsätze** als Verallgemeinerung des **Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung** auffassen.

### 2.5.1 Die Divergenz und der Integralsatz von Gauß

Wir betrachten die **Diffusion** eines Stoffes  $A$  in einem Lösungsmittel  $B$ . Jedem Raumpunkt kann man dann einen **Strömungsvektor**  $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$  zuordnen, so dass man ein **VF**, das so genannte **Strömungsfeld** erhält. Die **Konzentration** des Stoffes  $A$

zum Zeitpunkt  $t$  sei durch  $c(x, y, z, t)$  gegeben. Es gilt folgender Zusammenhang zwischen  $c$  und  $\mathbf{v}$ :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = - \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) = - \operatorname{div} \mathbf{v}$$

Stellt  $\mathbf{v}$  ein Strömungsfeld dar, so gibt  $-\operatorname{div} \mathbf{v}$  die **Konzentrationsänderung** dieses Strömungsfeldes nach  $t$  an. Stellen des **VF**  $\mathbf{v}$  mit **positiver Divergenz** nennt man **Quellen**, solche mit **negativer Divergenz** **Senken**.

**Theorem 2.6 (Gaußscher Integralsatz)** Sei  $B$  ein räumlicher Bereich mit einer geschlossenen, zweiseitigen, stückweise glatten Randfläche  $S$ , wobei die Außenseite der Fläche betrachtet wird, d.h., der Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}^0$  zeigt nach außen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, db &= \iiint_B \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) \, db \\ &= \oiint_S v_1 \, dy \, dz + v_2 \, dz \, dx + v_3 \, dx \, dy = \oiint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Der **Gaußsche Integralsatz** stellt einen Zusammenhang zwischen **Oberflächenintegralen 2. Art** und **räumlichen Bereichsintegralen** her. Das **Oberflächenintegral 2. Art** in (2.14) liefert bekanntlich den **Vektorfluss** des **Vektors**  $\mathbf{v}$  durch die geschlossene Fläche  $S$  in der Richtung von  $\mathbf{v}$ .

**Geometrische Interpretation:** Die Flüssigkeitsmenge, die durch die Oberfläche eines räumlichen Gebietes herausströmt, ist gleich der Flüssigkeitsmenge, die die Quellen in dem Gebiet erzeugen (Satz über die Erhaltung der Materie).

### Beispiel 2.8 (Gaußscher Integralsatz)

- (1) Bei einem Diffusionsvorgang sei der Strömungsvektor  $\mathbf{v} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$  gegeben. Welche Stoffmenge  $M$  strömt je Zeiteinheit aus einem Quader mit den Kantenlängen  $l, m, n$ ?

Nach dem **Gaußschen Integralsatz** ist

$$\begin{aligned} M &= \oiint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, db \\ &= \int_0^l \left( \int_0^m \left( \int_0^n (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) \, dz \right) \, dy \right) \, dx = l m n (l^2 + m^2 + n^2). \end{aligned}$$

- (2) Bei einem Diffusionsvorgang sei das Strömungsfeld  $\mathbf{v}_1 = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$  gegeben. Welche Stoffmenge  $M$  strömt je Zeiteinheit aus einem Körper  $B$  mit dem Volumen  $V(B)$ ?

Nach dem **Gaußschen Integralsatz** ist

$$M = \oiint_S \langle \mathbf{v}_1, d\mathbf{w} \rangle = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v}_1 \, db = \iiint_V (1 + 1 + 1) \, db = 3V(B).$$

Für das **VF**  $\mathbf{v}_2 = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$  ist  $\operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0$  und somit  $M = 0$ .

## 2.5.2 Die Rotation und der Integralsatz von Stokes

Zusammen mit dem  $\mathbf{VF} \mathbf{v}$  betrachtet man das **Wirbelfeld**  $\text{rot } \mathbf{v}$ , welches die Rotationsbewegungen von  $\mathbf{v}$  beschreibt. Für den Spezialfall  $\mathbf{v} = \omega(\mathbf{l}^0 \times \mathbf{r})$  (Rotation aller Punkte des Raumes mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine Achse in Richtung von  $\mathbf{l}$  ( $\mathbf{l}^0$  Einheitsvektor von  $\mathbf{l}$ )) gilt  $\text{rot } \mathbf{v} = 2\omega\mathbf{l}^0$ .

**Definition 2.2** Es sei  $F$  ein Flächenstück mit einer geschlossenen Randkurve  $C$ . Das Integral

$$Z = \oint_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = \oint_C v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$$

heißt **Zirkulation** des  $\mathbf{VF} \mathbf{v}$  längs der geschlossenen Kurve  $C$ .

Die **Zirkulation**  $Z$  ist ein Maß dafür, wie stark die Kurve  $C$  mittels der **Wirbel**, die sich in den Punkten der durch  $C$  umschlossenen Fläche befinden, umströmt wird.

**Theorem 2.7 (Stokesscher Integralsatz)** Sei  $S$  ein Flächenstück mit einer geschlossenen Randkurve  $C$ . Dabei werde der Umlaufsinn auf der Kurve derart gewählt, dass vom Standpunkt eines Beobachters aus, der auf der Seite der Fläche steht, auf der sich der **Normaleneinheitsvektor**  $\mathbf{n}^0$  befindet, die Kurve gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Dann gilt  $Z =$

$$\iint_S \langle \text{rot } \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle = \iint_S \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

Der **Stokessche Integralsatz** stellt einen Zusammenhang zwischen **Kurvenintegralen 2. Art** und **Oberflächenintegralen 2. Art** her.

**Geometrische Interpretation:** Die **Zirkulation** eines  $\mathbf{VF} \mathbf{v}$  längs einer geschlossenen Kurve  $C$  ist gleich dem **Vektorfluss** von  $\text{rot } \mathbf{v}$  durch die Fläche, die von der Kurve  $C$  begrenzt wird. Für ein  $\mathbf{PF} \mathbf{v}$  ist  $Z = 0$ , denn  $\mathbf{v} = \nabla U$  und  $\text{rot}(\nabla U) = \mathbf{0}$ .

Als Spezialfall des **Stokessche Integralsatzes** erhält man für  $n = 2$  die **Greensche Formel**:

$$\oint_C v_1 dx + v_2 dy = \iint_S \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dxdy = \iint_B \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) db.$$

**Beispiel 2.9 (Stokesscher Integralsatz)**

(1) Eine Kreislinie  $C$  sei durch die **Vektorfunktion**  $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$   $t \in [0, 2\pi]$  gegeben. Auf  $C$  seien die  $\mathbf{VF} \mathbf{v}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  und  $\mathbf{v}_2 = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j}$  definiert. Berechnen Sie in beiden Fällen die **Zirkulation**.

(2) Sei  $\mathbf{B}$  die magnetische Induktion,  $\mathbf{E}$  die elektrische Feldstärke. Die erste der **Maxwellschen Gleichungen** lautet in Integralform

$$\oint_C \langle \mathbf{E}, d\mathbf{r} \rangle = - \iint_S \langle \dot{\mathbf{B}}, d\mathbf{w} \rangle \implies \iint_S \langle \text{rot } \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}, d\mathbf{w} \rangle = 0 \forall S \implies \text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}.$$

Man erhält das **differentielle Induktionsgesetz**  $\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ .

# 3 Approximation von Funktionen

## 3.1 Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Das Ziel der Approximationstheorie besteht in der Annäherung komplizierter Funktionen durch solche, die einfach berechenbar sind.

### Definition 3.1 (Funktionenfolge, punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

1. Eine Folge

$$f_l(x), f_{l+1}(x), \dots, f_n(x) \dots = (f_k(x))_{k=l}^{\infty} \quad (3.1)$$

reeller Funktionen einer reellen Variablen  $x$ , die sämtlich auf einem Intervall  $[a, b]$  definiert sind, heißt **Funktionenfolge**.

2. Eine **Funktionenfolge** der Gestalt (3.1) heißt auf  $[a, b]$  **punktweise konvergent**, wenn für jedes fixierte  $x_0 \in [a, b]$  die **ZF**  $(f_k(x_0))_{k=l}^{\infty}$  konvergiert. Dabei gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

3. Sei  $f(x)$  mit  $D(f) = [a, b]$  gegeben. Die (ebene) Punktmenge

$$R_\varepsilon(f(x)) = \{(x, y) \mid x \in [a, b] \wedge |y - f(x)| < \varepsilon\}$$

heißt  $\varepsilon$ -Röhre für den Graphen von  $f(x)$ . Dabei nennt man  $f(x)$  "Mittellinie" und  $\varepsilon$  Radius der Röhre.

4. Eine **Funktionenfolge** der Gestalt (3.1) heißt auf  $[a, b]$  **gleichmäßig konvergent** mit der Grenzfunktion  $f(x)$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein Index  $k_0(\varepsilon)$  existiert, so dass für alle Indizes  $k \geq k_0$  und alle  $x \in [a, b]$  gilt

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Gleichmäßige Konvergenz** bedeutet also, dass es zu jeder  $\varepsilon$ -Röhre um  $f(x)$  einen Index  $k_0$  gibt, so dass die Graphen aller  $f_k(x)$  mit Indizes  $k \geq k_0$  für alle  $x \in [a, b]$  vollständig in der  $\varepsilon$ -Röhre liegen. Aus der **gleichmäßigen Konvergenz** folgt offensichtlich die **punktweise Konvergenz** für jedes  $x \in [a, b]$ .

### Beispiel 3.1 (punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

(1) Die **Funktionenfolge**  $(f_k(x))_{k=0}^{\infty} = (x^k)_{k=0}^{\infty}$ , definiert auf  $[a, b] = [0, 1]$ , **konvergiert punktweise**, aber **nicht gleichmäßig** in  $[0, 1]$ . Dabei gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}.$$

(2) Im Intervall  $[0, 1]$  besitzen die **Funktionenfolgen**  $(f_k^1(x))_{k=0}^{\infty} = \left(\frac{x}{1+k^2x^2}\right)_{k=0}^{\infty}$  und

$(f_k^2(x))_{k=0}^{\infty} = \left(\frac{kx}{1+k^2x^2}\right)_{k=0}^{\infty}$  die Grenzfunktion  $f(x) = 0$  für alle  $x \in [0, 1]$ . Dabei **konvergiert**  $(f_k^1(x))_{k=0}^{\infty}$  **gleichmäßig**, jedoch  $(f_k^2(x))_{k=0}^{\infty}$  **nicht gleichmäßig** gegen  $f(x)$  in  $[0, 1]$ .

### Definition 3.2 (Funktionenreihe, punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

1. Der Ausdruck

$$f_l(x) + f_{l+1}(x) + f_{l+2}(x) + \dots = \sum_{k=l}^{\infty} f_k(x), \quad (3.2)$$

formal gebildet aus der **Funktionenfolge** (3.1), heißt **Funktionenreihe**,  $f_k(x)$  heißen **Glieder der Funktionenreihe**, die Summe der ersten  $n + 1 - l$  ( $l < n + 1$ ) **Glieder der Funktionenreihe** ( $n$  fest) heißt  $n$ -te **Partialsomme der Funktionenreihe**:

$$s_n(x) := f_l(x) + f_{l+1}(x) + \dots + f_{l+n}(x) = \sum_{k=l}^{l+n} f_k(x).$$

2. Eine **Funktionenreihe** heißt **punktweise** bzw. **gleichmäßig konvergent** auf  $[a, b]$ , wenn die **Funktionenfolge**  $(s_n(x))_{n=0}^{\infty}$  eine solche Eigenschaft besitzt.

3. Die **Grenzfunktion**

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=l}^n f_k(x)$$

heißt **Summenfunktion** oder **Summe der Funktionenreihe**.

### Hinreichendes Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz (Weierstraß)

Die Reihe  $\sum_{k=l}^{\infty} f_k(x)$  konvergiert **gleichmäßig** auf einem Intervall  $[a, b]$ , wenn eine **konvergente Zahlenreihe**  $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$  existiert, für die gilt:

$$|f_k(x)| \leq a_k \quad \text{für } k = l, (l+1), \dots \quad \text{und alle } x \in [a, b].$$

**Beispiel 3.2** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$  konvergiert **gleichmäßig** für alle reellen  $x$ ,

denn  $\left| \frac{\sin kx}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \geq 1$  und die **Zahlenreihe**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  ist **konvergent**.

Für die Anwendungen wichtige Klassen von **Funktionenreihen** sind die **Potenzreihen** und die **Fourier-Reihen**.

## 3.2 Approximation durch Potenzreihen

Potenzreihen werden z.B. zur Lösung von Differenzialgleichungen verwendet.

Bekannt ist der **Satz von Taylor**. Er liefert eine Möglichkeit der Annäherung einer **hinreichend oft differenzierbaren Funktion** durch ein Polynom der Form

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}.$$

Dieser Ausdruck kann als  $n$ -te **Partialsomme** eine **Reihe** aufgefasst werden, deren **Glieder** mit einer Konstante multiplizierte Potenzfunktionen sind.

**Definition 3.3** Eine **Funktionenreihe** der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  ( $c_k \in \mathbb{R} \forall k$ ) heißt eine **PR** mit den Koeffizienten  $c_k$  und dem Mittelpunkt in 0. Allgemeiner betrachtet man auch **PR** der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$  mit dem Mittelpunkt in  $x_0$ .

**Beispiel 3.3 (Konvergenz von PR-n)**

(1) Die **geometrische Reihe**  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  (hier ist  $q = x$ ,  $c_k = 1 \forall k$ ) **konvergiert** für  $|x| < 1$ . Es ist  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ .

(2) Die **PR**  $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$  **konvergiert** nur für  $x = 0$ ,

$$\text{denn } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1)! x^{k+1}}{k! x^k} \right| = |x| \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = +\infty \quad \forall x \neq 0.$$

(3) Die **PR**  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  **konvergiert** für alle  $x \in ]-\infty, +\infty[$ ,

$$\text{denn } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k! x^{k+1}}{(k+1)! x^k} \right| = |x| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0 \quad \forall x \in ]-\infty, +\infty[. \text{ Es ist } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

(4) Jede **PR** ist in  $x = 0$  **konvergent** mit der Summe  $c_0$ .

**Theorem 3.1** Wenn eine **PR** weder **nur** für  $x = 0$  noch für **alle**  $x \in ]-\infty, +\infty[$  **konvergiert**, so existiert genau eine positive Zahl  $r$ , (der **Konvergenzradius (KR)**), mit der Eigenschaft, dass sie für **alle**  $x$  mit  $|x| < r$  **absolut konvergiert** (d.h., die aus den absoluten Beträgen ihrer Glieder gebildete Reihe konvergiert (siehe Skript Mathe I, Abschn. 2.2)) und für **alle**  $x$  mit  $|x| > r$  **divergiert**. Für  $|x| = r$  ist keine allgemeingültige Aussage über das Konvergenzverhalten möglich. In jedem abgeschlossenen Teilintervall des Intervalls  $] -r, r[$  konvergiert die **PR** **gleichmäßig**.

**Konvergiert** eine **PR** nur für  $x = 0$ , so setzt man  $r = 0$ .

**Konvergiert** eine **PR** für **alle**  $x \in \mathbb{R}$ , so setzt man  $r = +\infty$ .

Existiert  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \right)$  als **eigentlicher** oder **uneigentlicher GW**, so gilt für den **KR**  $r$  der **PR**  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

$$r = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \quad (\text{vgl. WK}) \quad \left( r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \right) \quad (\text{vgl. QK}).$$

**Beispiel 3.4 (KR)** Die **geometrische Reihe**  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  besitzt den **KR**  $r = 1$ . Der Fall  $|x| = 1$  ist gesondert zu untersuchen. Man erhält

für  $x = +1$  die **Reihe**  $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ , die **bestimmt divergent** ist,

für  $x = -1$  die **Reihe**  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ , die **unbestimmt divergent** ist.

**Definition 3.4** Die formal gebildete **Reihe**  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  heißt **Taylor'sche Reihe** der Funktion  $f(x)$  mit dem Mittelpunkt 0 und den **Taylor-Koeffizienten**  $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$  von  $f(x)$ .

**Theorem 3.2** Sei  $0 \in [a, b]$ ,  $f(x)$  sei in  $[a, b]$  beliebig oft **differenzierbar**. Dann gilt: Die **Taylor'sche Reihe konvergiert** für jedes  $x \in [a, b]$  und besitzt  $f(x)$  als **Summenfunktion** genau dann, wenn die Folge der Restglieder  $(R_n(x))$  der **Taylor'schen Formel** eine **Nullfolge** ist, d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \forall x \in [a, b] \iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Die **Taylor'schen Reihen** der wichtigsten elementaren Funktionen sind zusammen mit den **KR** in den Tafelwerken aufgeführt.

### 3.3 Approximation durch Fourier-Reihen

#### 3.3.1 Periodische und periodisch fortsetzbare Funktionen

Die Approximation einer Funktion  $f(t)$  durch die **Taylor'sche Formel** ist an die Differenzierbarkeit dieser Funktion gebunden. In den Anwendungen ist die Differenzierbarkeit der zu untersuchenden Funktionen nicht immer gegeben. Deshalb interessieren uns Approximationen von Funktionen aus allgemeineren Funktionenklassen.

#### Definition 3.5 (absolut integrierbare Funktionen)

Eine Funktion  $f(t)$  heißt **absolut integrierbar** im Intervall  $]a, b[$ , wenn

$$\int_a^b |f(t)| dt < \infty \quad \text{für beliebige } a, b \quad \text{mit } -\infty < a < b < +\infty.$$

Zur Klasse der **absolut integrierbaren** Funktionen gehören alle in  $[a, b]$  stetigen Funktionen, alle beschränkten Funktionen, die in  $]a, b[$  nur endlich viele Sprungstellen besitzen (stückweise stetige Funktionen), aber auch unbeschränkte Funktionen, für die das Integral  $\int_a^b |f(t)| dt$  einen endlichen Wert besitzt.

#### Beispiel 3.5 (absolut integrierbare Funktion)

$$g(t) = t^{-1/2}, \quad t \in ]0, 1[ \quad \text{mit} \quad \int_0^1 |g(t)| dt = \int_0^1 g(t) dt = 2.$$

In Physik und Technik spielen periodische Vorgänge eine große Rolle (Drehbewegungen, mechanische und elektrische Schwingungen, Wellen). Deshalb betrachten wir in der Klasse der **absolut integrierbaren** Funktionen periodische Funktionen.

### Definition 3.6 (periodische Funktionen)

Eine Funktion  $f(t)$  heißt  $T$ -periodisch, wenn für  $T > 0$  gilt

$$f(t + T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Die Zahl  $T$  heißt Periode der Funktion  $f(t)$ .

### Eigenschaften periodischer Funktionen

1. Mit  $T$  sind auch  $T_n = nT$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , Perioden von  $f(t)$ .

2. Die Funktionen  $f(t)$  und  $g(t)$  seien  $T$ -periodisch. Dann ist auch die Funktion

$$h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

eine  $T$ -periodische Funktion.

3. Die Funktion  $f(t)$  sei  $2\pi$ -periodisch und  $T > 0$  sei eine gegebene Periode. Dann ist

$$F(t) = f\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

eine  $T$ -periodische Funktion.

4. Für eine  $T$ -periodische Funktion  $f(t)$  gilt

$$\int_c^{c+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

5. Die Funktion  $f(t)$  sei  $T$ -periodisch und  $g(t)$  sei  $G$ -periodisch. Dann ist die Funktion  $h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$   $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$   $H$ -periodisch, wenn es Zahlen  $n, m \in \mathbb{N}$  gibt mit

$$H = nT \quad H = mG.$$

Gesucht ist in der Regel die kleinste Periode  $T > 0$  einer periodischen Funktion  $f(t)$ . Mit der Kreisfrequenz  $\omega$  gilt  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  und  $T$  heißt auch Schwingungsdauer. Für  $f(t) = \sin t$  ist  $\omega = 1$  und  $T = 2\pi$  die kleinste Periode.

### Periodische Fortsetzung

Die Funktion  $g(t)$  sei **absolut integrierbar** auf einem beschränkten Intervall  $]a, b[$ . Wir setzen  $T = b - a$  und bilden die  $T$ -periodische Fortsetzung  $f(t)$  der Funktion  $g(t)$

$$f(t) = g(t - kT), \quad t \in ]a + kT, b + kT[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Existieren in einem Randpunkt  $t_0 \in \mathbb{R}$  der Intervalle die beiden endlichen einseitigen Grenzwerte von  $f(t)$

$$f(t_0 - 0) = \lim_{t \rightarrow t_0 - 0} f(t) \quad f(t_0 + 0) = \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} f(t),$$

so definieren wir  $f(t_0)$  als arithmetisches Mittel

$$f(t_0) = \frac{1}{2}[f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)].$$

Bei dieser periodischen Fortsetzung bleibt die **absolute Integrierbarkeit** erhalten.

### Beispiel 3.6 (Periodizität, periodische Fortsetzbarkeit)

- (1) Für konstante Funktionen  $f(t) = c$  existiert keine kleinste Periode. Jede konstante Funktion ist  $T$ -periodisch für alle  $T > 0$ .
- (2) Die Funktion  $h(t) = \sin t + \sin 2t + \sin 4t$  besitzt als kleinste Periode  $T = 2\pi$ . In der Tat,  $f_1(t) = \sin t$  ist  $2\pi$ -periodisch,  $f_2(t) = \sin 2t$   $\pi$ -periodisch und  $f_3(t) = \sin 4t$   $\pi/2$ -periodisch. Nach Eigenschaft 5. periodischer Funktionen erhält man eine Periode für die Funktion  $h(t)$ , falls es Zahlen  $n, m, k \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$H = n 2\pi, \quad H = m \pi, \quad H = k \frac{\pi}{2}$$

gilt. Die kleinsten natürlichen Zahlen, die die Gleichungen erfüllen, sind  $n = 1$ ,  $m = 2$ ,  $k = 4$ . Somit ist  $T = 2\pi$  die kleinste Periode der Funktion  $h(t)$ .

- (3) Es sei  $g(t) = \sin t$ ,  $-1 < t < 3$ . Mit  $T = 4$  lautet die 4-periodische Fortsetzung

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin(t - 4k), \quad t \in ]-1 + 4k, 3 + 4k[, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ f(-1 + 4k) &= \frac{1}{2}[\sin(-1) + \sin(3)], \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

### 3.3.2 Reelle Fourier-Reihen

**Problem:** Unter welchen Voraussetzungen lassen sich periodische Funktionen durch Reihen von periodischen Funktionen darstellen, genauer, wann lässt sich ein periodischer Vorgang durch eine unendliche **Reihe** der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad (3.3)$$

die **trigonometrische Reihe** genannt wird, darstellen und wie sind die Zahlen  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ),  $b_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) zu bestimmen?

Eine reine Sinusschwingung mit der Kreisfrequenz  $k\omega$   $k = 2, 3, 4, \dots$  nennt man die **k-te Harmonische** oder **Oberschwingung** zur **Grundschiwingung**  $\sin \omega t$  mit der Kreisfrequenz  $\omega$ . Dann kann man das Problem wie folgt formulieren: Wann lässt sich ein periodischer Vorgang durch Überlagerung einer **Grundschiwingung** mit gewissen **Oberschwingungen** darstellen?

In den Anwendungen bricht man oft nach **endlich vielen Gliedern** der **Reihe** ab und erhält eine Approximation der Funktion durch ein **trigonometrisches Polynom**.

**Theorem 3.3** *Es gelte:*

- (i) Die **trigonometrische Reihe**  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$   $\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$  der  $T$ -periodischen Funktion  $f(t)$  **konvergiere** im Intervall  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  **gleichmässig**.

(ii)  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$ .

Dann gilt:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cos k\omega t \, dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (c \in \mathbb{R}) \quad (3.4)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \sin k\omega t \, dt \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.5)$$

**Definition 3.7** Sei  $g(t)$  absolut integrierbar im Intervall  $] -\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ . Die mit Hilfe der Beziehungen (3.4) und (3.5) formal gebildete **Reihe** der Form (3.3) heißt **Fourier-Reihe (FR)** der  $T$ -periodischen Fortsetzung  $f(t)$  der Funktion  $g(t)$ , die Zahlen  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) und  $b_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) gemäß (3.4) und (3.5) nennt man **Fourier-Koeffizienten (FK)** der Funktion  $f(t)$ .

### Wichtige Spezialfälle von FK

- (1) Für  $2\pi$ -periodische Funktionen, d.h.  $T = 2\pi$  und  $\omega = 1$  erhält man aus (3.4) und (3.5) mit  $c = -\pi$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.6)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.7)$$

- (2) Mit  $c = -\frac{T}{2}$  und  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  ergeben sich (3.4) und (3.5) in der Form

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t \, dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.8)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t \, dt \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.9)$$

Bei der praktischen Berechnung der **FK** beachte man, dass im Intervall  $] -\pi, \pi[$  bzw.  $] -\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$  die Beziehung  $f(t) = g(t)$  gilt.

Die Bestimmung der **FK** nennt man auch **harmonische Analyse**. Sie wird in der Technik häufig zur Analyse periodischer Vorgänge verwendet.

**Theorem 3.4 (Abklingverhalten der FK)** Für absolut integrierbare Funktionen  $f(t)$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0.$$

## Interpretation der reellen FR in den Anwendungen

- Jede Funktion  $a_k \cos \omega t + b_k \sin \omega t$  beschreibt eine reelle harmonische Schwingung.
- Die Reihe (3.3) interpretiert man als Überlagerung unendlich vieler reeller harmonischer Schwingungen.
- Die Zahlen  $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$  sind die reellen Amplituden der harmonischen Schwingung  $a_k \cos \omega t + b_k \sin \omega t$ .
- Die reellen Folgen der **FK**  $(a_k)_k, (b_k)_k$  nennt man **diskretes Amplitudenspektrum** einer  $T$ -periodischen Funktion  $f(t)$ .

Das **diskrete Amplitudenspektrum** lässt sich als die Graphen der beiden Folgen darstellen.

### Beispiel 3.7 (Endliche, unendliche FR-n, FR-n unbeschränkter Funktionen)

$$(1) \quad g(t) = \sin^2 t, \quad t \in ]0, \pi[, \quad T = \pi, \quad \omega = 2$$

Die  $\pi$ -periodische Fortsetzung lautet:  $f(t) = \sin^2(t - k\pi), t \in ]k\pi, (k+1)\pi[ \quad k \in \mathbb{Z}$ , d.h.  $f(t) = \sin^2 t, t \in \mathbb{R}$ . Bekanntlich gilt die trigonometrische Formel

$$f(t) = \sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t,$$

deshalb darf man zwischen Funktion und **FR** sofort das Gleichheitszeichen setzen.

- (2) Entwickeln Sie  $g(t) = e^t$  im Intervall  $] -\pi, \pi[$  in ihre **FR** und skizzieren Sie das **diskrete Amplitudenspektrum**.

Es ist  $T = 2\pi$  und  $\omega = 1$ . Folglich erhält man aus (3.5) und (3.7):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{2}{\pi} \sinh \pi, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos kt dt = \frac{2(-1)^k \sinh \pi}{\pi(1+k^2)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin kt dt = -\frac{2k(-1)^k \sinh \pi}{\pi(1+k^2)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Dabei ist  $\sinh \pi = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2}$ . Die **FR** der Funktion  $e^t$  hat die Gestalt

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi} \sinh \pi \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} (\cos kt - k \sin kt) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \sinh \pi \left( \frac{1}{2} + \left[ -\frac{1}{2}(\cos t - \sin t) + \frac{1}{5}(\cos 2t - 2 \sin 2t) - \dots \right] \right). \end{aligned}$$

Ein Gleichheitszeichen zwischen Funktion und **FR** darf i. Allg. nicht gesetzt werden (Konvergenzuntersuchungen erforderlich).

(3) Berechnen Sie die **FK** der Funktion  $f(t)$ , die durch periodische Fortsetzung von  $g(t) = t^{-1/2}$ ,  $t \in ]0, 1[$  gebildet wird (vgl. Beispiel 3.5).

Es ist  $T = 1$  und  $\omega = 2\pi$ . Die 1-periodische Fortsetzung lautet:  $f(t) = g(t - k) = (t - k)^{-1/2}$ ,  $t \in ]k, 1 + k[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Die **absolute Integrierbarkeit** bleibt bei dieser periodischen Fortsetzung erhalten. Setzt man in (3.4) und (3.5)  $T = 1$ ,  $c = 0$  sowie  $\omega = 2\pi$ , so ergibt sich  $a_0 = 4$ ,

$$a_k = 2 \int_0^1 \frac{\cos(2k\pi t)}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2k\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{z}} dz = \frac{2}{\sqrt{k}} C(2k\pi), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$b_k = 2 \int_0^1 \frac{\sin(2k\pi t)}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2k\pi} \frac{\sin z}{\sqrt{z}} dz = \frac{2}{\sqrt{k}} S(2k\pi), \quad k = 1, 2, \dots,$$

wobei  $C(t)$  und  $S(t)$  die **Fresnel-Integrale**

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\cos z}{\sqrt{z}} dz, \quad S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\sin z}{\sqrt{z}} dz$$

bezeichnen. Funktionswerte dieser Funktionen können Tabellen entnommen werden oder man erhält sie durch numerische Auswertung der Integrale.

## Entwicklung in eine reine Kosinus- oder eine reine Sinusreihe

**Lemma 3.1** Jede Linearkombination gerader (ungerader) Funktionen ist eine gerade (ungerade) Funktion. Das Produkt zweier gerader oder ungerader Funktionen ist eine gerade Funktion. Das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Funktion ist eine ungerade Funktion.

**Lemma 3.2** Für die Integration gerader bzw. ungerader Funktionen  $h(t)$  über symmetrische Intervalle  $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$  gilt:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(t) dt = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} h(t) dt, \quad \text{falls } h(t) \text{ gerade,} \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(t) dt = 0, \quad \text{falls } h(t) \text{ ungerade.}$$

□

1. Sei  $f(t)$  in  $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$  **absolut integrierbar** und eine **gerade Funktion**, d.h. es gilt  $f(t) = f(-t) \quad \forall t \in ]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ . Dann ist  $h_1(t) = f(t) \cos k\omega t$  eine **gerade** und  $h_2(t) = f(t) \sin k\omega t$  eine **ungerade** Funktion. Für die **FK** gilt nun gemäß (3.8) und (3.9)

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad b_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.10)$$

Die **FR** von  $f(t)$  hat dann die Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t. \quad (3.11)$$

2. Sei  $f(t)$  in  $] -\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$  **absolut integrierbar** und eine **ungerade Funktion**, d.h. es gilt  $f(t) = -f(-t) \quad \forall t \in ] -\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ . Dann ist  $h_1(t) = f(t) \cos k\omega t$  eine **ungerade** und  $h_2(t) = f(t) \sin k\omega t$  eine **gerade** Funktion. Für die **FK** gilt nun gemäß (3.8) und (3.9)

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t dt \quad (k = 1, 2, \dots) \quad a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (3.12)$$

Die **FR** von  $f(t)$  hat dann die Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t \quad (3.13)$$

### Entwicklung gerader und ungerader periodischer Fortsetzungen in eine **FR**

Die Funktion  $g(t)$  sei im Intervall  $]0, \frac{T}{2}[$  definiert und **absolut integrierbar**. Außerdem mögen die beiden endlichen einseitigen Grenzwerte in den Randpunkten des Intervalls existieren. Dann lässt sich sowohl eine **reine Kosinus-Reihe** der Form (3.11) als auch eine **reine Sinus-Reihe** der Form (3.13) wie folgt angeben:

1. 1° Definieren die gerade Fortsetzung von  $g(t)$

$$g_1(t) = \begin{cases} g(t) & t \in ]0, \frac{T}{2}[ \\ g(-t) & t \in ]-\frac{T}{2}, 0[ \end{cases} \quad g_1(0) = \frac{1}{2}[g(0-0) + g(0+0)].$$

- 2° Setzen die Funktion  $g_1(t)$  außerhalb des Intervalls  $] -\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$  durch  $f_1(t) = g_1(t - kT) \quad t \in ](2k-1)\frac{T}{2}, (2k+1)\frac{T}{2}[ \quad k \in \mathbb{Z}$ , mit der Periode  $T$  fort.

- 3° Berechnen die **FK** von  $g_1(t)$  nach Formel (3.10).

2. 1° Definieren die ungerade Fortsetzung von  $g(t)$

$$g_2(t) = \begin{cases} g(t) & t \in ]0, \frac{T}{2}[ \\ -g(-t) & t \in ]-\frac{T}{2}, 0[ \end{cases} \quad g_2(0) = \frac{1}{2}[g(0-0) + g(0+0)].$$

- 2° Setzen die Funktion  $g_2(t)$  außerhalb des Intervalls wie in 2° fort.

- 3° Berechnen die **FK** von  $g_2(t)$  nach Formel (3.12).

### Beispiel 3.8 (Reine Kosinus- bzw. reine Sinusreihen)

- (1) Gegeben:  $g(t) = t, \quad t \in ]0, \pi[$ . Gesucht: Entwicklung in eine **reine Kosinusreihe**.

Es gilt  $T = 2\pi$ , d.h.  $\omega = 1$ . Definiert man  $g_1(t) = g(t) = t$  für  $t \in ]0, \pi[$ ,  $g_1(t) = g(-t) = -t$  für  $t \in ]-\pi, 0[$  und  $g_1(0) = 0$ , so ergibt sich  $g_1(t) = |t|$  für  $t \in ]-\pi, \pi[$

**(gerade Funktion).** Die  $2\pi$ -periodische Fortsetzung  $f_1(t)$  außerhalb des Intervalls  $] - \pi, \pi[$  liefert mit  $f_1(-\pi) = f_1(\pi) = \pi$  die so genannten Dreiecksimpulse. Aus (3.10) folgt

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \, dt = \pi \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos kt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ -\frac{4}{\pi} \frac{1}{k^2} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Die **FR** ist von der Form (3.11)

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \dots \right). \quad (3.14)$$

(2) Gegeben:  $g(t) = t$ ,  $t \in ]0, \pi[$ . Gesucht: Entwicklung in eine **reine Sinusreihe**.

Es gilt wieder  $T = 2\pi$  und  $\omega = 1$ . Definiert man  $g_2(t) = g(t) = t$  für  $t \in ]0, \pi[$  und  $g_2(t) = -g(-t) = -(-t) = t$  für  $t \in ]-\pi, 0[$  sowie  $g_2(0) = 0$ , so ergibt sich  $g_2(t) = t$  für  $t \in ]-\pi, \pi[$  (**ungerade Funktion**). Die  $2\pi$ -periodische Fortsetzung  $f_2(t)$  außerhalb des Intervalls  $] - \pi, \pi[$  liefert mit  $f_2(-\pi) = f_2(\pi) = 0$  die so genannte Sägezahnkurve, die beim Fernsehgerät die horizontale Bewegung des Lichtpunktes auf dem Bildschirm beschreibt. Aus (3.12) folgt

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin kt \, dt = -\frac{2}{k} (-1)^k = \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Die **FR** ist von der Form (3.13)

$$2 \left( \frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \dots \right). \quad (3.15)$$

### 3.3.3 Komplexe Fourier-Reihen

Es sei  $f$  **absolut integrierbar** in  $] - \frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ . Wir betrachten die **FR** der Funktion  $f(t)$  in der Gestalt (3.3) mit den **FK** in der Form (3.8) und (3.9). Die Darstellung der **FK** in komplexer Form erhält man mit Hilfe der **Eulerschen Formel**

$$e^{ik\omega t} = \cos k\omega t + i \sin k\omega t \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

Ersetzt man in (3.16)  $t$  durch  $-t$ , so gilt wegen  $\cos(-k\omega t) = \cos k\omega t$  und  $\sin(-k\omega t) = -\sin k\omega t$

$$e^{-ik\omega t} = \cos k\omega t - i \sin k\omega t \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.17)$$

Durch Addition (Subtraktion) von (3.16) und (3.17) wird die Exponentialfunktion für ein rein imaginäres Argument  $e^{ik\omega t}$  mit der Kosinus- (Sinusfunktion) für ein reelles Argument verknüpft:

$$(3.16)+(3.17) : \cos k\omega t = \frac{1}{2}(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}), \quad (3.16)-(3.17) : \sin k\omega t = \frac{1}{2i}(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}). \quad (3.18)$$

Wegen (3.18) erhält man aus (3.3)

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k}{2}(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}) + \frac{b_k}{2i}(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \frac{a_k - ib_k}{2} \right) e^{ik\omega t} + \left( \frac{a_k + ib_k}{2} \right) e^{-ik\omega t} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Wir setzen

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.20)$$

und erhalten aus (3.19) die komplexe Form der **FR**

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}. \quad (3.21)$$

Für die komplexen **FK** ergibt sich aus (3.20) sowie (3.8) bzw. (3.9)

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \\ c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)(\cos k\omega t - i \sin k\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ c_{-k} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)(\cos k\omega t + i \sin k\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{ik\omega t} dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

wofür man einheitlich

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.22)$$

schreiben kann. Aus (3.20) folgt, dass für reellwertige Funktionen  $f(t)$  die Zahlen  $c_k$  und  $c_{-k}$  zueinander konjugiert komplex sind, d.h.  $c_k = \overline{c_{-k}}$  und  $c_{-k} = \overline{c_k}$ .

### Interpretation der komplexen FR in den Anwendungen

- Jede Funktion  $c_k e^{ik\omega t}$  beschreibt eine komplexe harmonische Schwingung.

- Die **Reihe** (3.21) interpretiert man als Überlagerung unendlich vieler komplexer harmonischer Schwingungen.
- Die komplexen **FK**  $c_k$  sind die komplexen Amplituden der komplexen harmonischen Schwingungen  $c_k e^{ik\omega t}$ . Gemäß (3.20) ist  $|c_k| = \frac{1}{2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ . Folglich sind die reellen Zahlen  $|c_k|$  bis auf den Faktor  $\frac{1}{2}$  gleich der Amplitude der reellen harmonischen Schwingung  $a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$ .
- Die i. Allg. komplexe Folge  $(c_k)$  der **FK** heißt **diskretes Frequenzspektrum** oder **Spektralfolge**, die reellen Folgen  $(|c_k|)$  bzw.  $(\arg c_k)$  nennt man **diskretes Amplitudenspektrum** bzw. **diskretes Phasenspektrum** einer  $T$ -periodischen Funktion  $f(t)$ .

Das i. Allg. komplexe **diskrete Frequenzspektrum** lässt sich in der Gaußschen Zahlenebene skizzieren. Die **diskreten Amplituden-** und **Phasenspektren** von  $f(t)$  lassen sich in einem Koordinatensystem in der reellen Ebene grafisch darstellen.

**Beispiel 3.9** Berechnen Sie für einen Rechteckimpuls der Periode  $T = 2\pi$

$$g(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < t < 0 \\ +1 & \text{für } 0 < t < \pi \end{cases}$$

das **diskrete Frequenzspektrum** und stellen Sie dieses sowie das **diskrete Amplitudenspektrum** und das **diskrete Phasenspektrum** grafisch dar. Geben Sie die komplexe und die reelle Form der **FR** an.

Für die komplexen **FK** erhält man im Falle  $k \geq 0$

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot dt + \int_0^{\pi} 1 \cdot dt \right] = \frac{1}{2\pi} [-\pi + \pi] = 0 \\ c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot e^{-ikt} dt + \int_0^{\pi} 1 \cdot e^{-ikt} dt \right] \\ &= -\frac{i}{k} [1 - e^{ik\pi}] + \frac{i}{k} [e^{-ik\pi} - 1] = \frac{i}{2\pi k} [e^{-ik\pi} - 1 - 1 + e^{ik\pi}] \\ &= \frac{i}{k\pi} [\cos k\pi - 1] = \frac{i}{k\pi} [(-1)^k - 1]. \end{aligned}$$

Also ist für alle  $k \geq 0$

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ -\frac{2i}{k\pi} & \text{für } k \text{ ungerade,} \end{cases} \quad c_{-k} = \bar{c}_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ ungerade} \\ \frac{2i}{k\pi} & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Für alle  $k \in \mathbb{Z}$  gilt nun

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ -\frac{2i}{k\pi} & \text{für } k \text{ ungerade,} \end{cases} \quad |c_k| = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{2}{|k|\pi} & \text{für } k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$$\arg c_k = \begin{cases} \text{unbest.} & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{3\pi}{2} & \text{für } k \text{ ungerade, } k > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } k \text{ ungerade, } k < 0 \end{cases} = \begin{cases} \text{unbest.} & \text{für } k \text{ gerade} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } k \text{ ungerade, } k > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } k \text{ ungerade, } k < 0 \end{cases}$$

Wir setzen noch  $k = 2l + 1 \quad l \in \mathbb{N}_0$ , um in der Formel für die **FR** nur über die ungeraden Indices zu summieren. Die komplexe Form der **FR** lautet nun:

$$\frac{2i}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[e^{-i(2l+1)t} - e^{i(2l+1)t}]}{2l+1} = \dots + \frac{2i}{5\pi} e^{-i5t} + \frac{2i}{3\pi} e^{-i3t} + \frac{2i}{\pi} e^{-it} - \frac{2i}{\pi} e^{it} - \frac{2i}{3\pi} e^{i3t} - \frac{2i}{5\pi} e^{i5t} - \dots$$

Unter Verwendung der Beziehung

$$\frac{2i}{(2l+1)\pi} [e^{-i(2l+1)t} - e^{i(2l+1)t}] = \frac{(-2i)2i}{(2l+1)\pi} \frac{e^{i(2l+1)t} - e^{-i(2l+1)t}}{2i} = \frac{4 \sin(2l+1)t}{\pi (2l+1)}$$

erhält man die reelle Form der **FR**:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin(2l+1)t}{2l+1} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots \right).$$

### 3.3.4 Konvergenzaussagen

Die folgenden Aussagen gelten sowohl für die **reelle** als auch die **komplexe FR**. Bisher können wir nur die **FR** einer  $T$ -periodischen Funktion  $f(t)$  mit den **FK** angeben. Folgende Fragen sind von Interesse:

1. Für welche  $t$  **konvergiert** die **FR** **punktweise**?
2. Für welche dieser  $t$  konvergiert die **FR** gegen  $f(t)$ , d.h. wann darf zwischen  $f(t)$  und der **FR** das Gleichheitszeichen gesetzt werden?

**Theorem 3.5 (Satz von Dirichlet)** *Es seien die Dirichletschen Bedingungen erfüllt:*

- (i) Das Intervall  $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$  lasse sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in denen die  $T$ -periodische Funktion  $f(t)$  **stetig** und **monoton** ist.
- (ii) Ist  $t_0$  eine **Unstetigkeitsstelle** von  $f(t)$ , so existieren die beiden endlichen einseitigen Grenzwerte

$$f(t_0 - 0) = \lim_{t \rightarrow t_0 - 0} f(t) \quad f(t_0 + 0) = \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} f(t).$$

Dann gilt:

1° Die **FR** der Funktion  $f(t)$  **konvergiert** für alle  $t \in \mathbb{R}$  **punktweise**, d.h., es gilt:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) = \begin{cases} f(t), & \text{falls } f \text{ stetig in } t, \\ \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)], & \text{sonst.} \end{cases}$$

2° Die **Konvergenz** der **FR** ist **gleichmäßig** in jedem abgeschlossenen Teilintervall, in dem  $f(t)$  **stetig** ist. d.h. es gilt in jedem dieser Teilintervalle

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) = f(t).$$

**Theorem 3.6** Sei  $f$  eine **stetige** und bis auf endlich viele Punkte, in denen die Ableitung Sprungstellen besitzt, **stetig differenzierbare** Funktion der Periode  $T$ . Dann konvergiert ihre **FR** **gleichmäßig** und **absolut** gegen  $f(t)$ . Für ihre **FK**  $a_k, b_k$  folgt sogar die **Konvergenz** der **Reihen**  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$  bzw.  $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|$ .

### Beispiel 3.10 (Konvergenz von FR)

(1) Sei  $g(t) = e^t$  für  $t \in ]-\pi, \pi[$  (vgl. Beispiel 3.7 (3)). Die Voraussetzungen des **Satzes von Dirichlet** sind erfüllt. Bei der  $2\pi$ -periodischen Fortsetzung  $f(t)$  der Funktion  $e^t$  entstehen in den Punkten  $t_k = (2k-1)\pi, k \in \mathbb{Z}$  Unstetigkeitsstellen (Sprungstellen). An diesen Stellen ist

$$\frac{1}{2}(f(t_k - 0) + f(t_k + 0)) = \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} = \cosh \pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Es gilt also

$$\frac{2}{\pi} \sinh \pi \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} (\cos kt - k \sin kt) \right) = \begin{cases} f(t) & \text{für } t \neq t_k \quad k \in \mathbb{Z} \\ \cosh \pi & \text{für } t = t_k \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

(2) Sei  $g_1(t) = |t|$  für  $t \in ]-\pi, \pi[$  (vgl. Beispiel 3.8 (1)). Die Voraussetzungen des **Satzes von Dirichlet** sind erfüllt. Bei der  $2\pi$ -periodischen Fortsetzung  $f_1(t)$  der Funktion  $|t|$  entsteht eine **stetige** Funktion. Es gilt also

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \dots \right) = f_1(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.23)$$

(3) Sei  $g_2(t) = t$  für  $t \in ]-\pi, \pi[$  (vgl. Beispiel 3.8 (2)). Die Voraussetzungen des **Satzes von Dirichlet** sind erfüllt. Bei der  $2\pi$ -periodischen Fortsetzung  $f_2(t)$  der Funktion  $t$  entstehen in den Punkten  $t_k = (2k-1)\pi, k \in \mathbb{Z}$  wieder Sprungstellen. An diesen Stellen ist

$$\frac{1}{2}(f_2(t_k - 0) + f_2(t_k + 0)) = \frac{1}{2}(\pi + (-\pi)) = 0 \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Es gilt also

$$2 \left( \frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \dots \right) = \begin{cases} f_2(t) & \text{für } t \neq (2k-1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für } t = (2k-1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (3.24)$$

## 4 Integraltransformationen

### 4.1 Die Laplace-Transformation

Unter einer **Integraltransformation (IT)**  $T$  versteht man eine **eindeutige** Zuordnung

$$(Tf)(x) = F(x) = \int_I K(x, y) f(y) dy, \quad x \in I,$$

wobei  $I$  ein i. Allg. nicht beschränktes Intervall ist, d.h. das Integral ist uneigentlich. Damit dieses Integral überhaupt sinnvoll ist, müssen die Funktion  $f$  und die **Kernfunktion**  $K(x, y)$  geeigneten Voraussetzungen genügen. Speziell betrachten wir die **Laplace-Transformation (LT)**:

$$L(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}, \quad \text{d.h. } I = ]0, \infty[, \quad K(p, t) = e^{-pt}. \quad (4.1)$$

Aus (4.1) folgt, dass die Werte von  $f(t)$  nur für  $t \geq 0$  von Interesse sind. Für  $t < 0$  kann  $f(t)$  beliebig sein. Wir setzen deshalb immer  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ .

**Theorem 4.1** *Es gelte*

- (i)  $f(t)$  sei **absolut integrierbar** in jedem endlichen Intervall  $]0, A[$ ,
- (ii) es mögen reelle Konstanten  $c \geq 0$  und  $M > 0$  existieren, so dass gilt

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \quad \forall t \geq 0.$$

Dann existiert die **LT**

$$L[f(t)] = L(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad p \in \mathbb{C} \quad (4.2)$$

für wenigstens alle  $p$  mit  $\operatorname{Re} p > c$ , d.h.  $\sigma > c$ .

Die Halbebene  $\operatorname{Re} p > c$  heißt **Konvergenzhalbebene** der Transformation.

**Theorem 4.2** *Zu einer Bildfunktion  $L(p)$  gehört höchstens eine für  $t > 0$  stetige Originalfunktion  $f(t) = L^{-1}[L(p)]$ , d.h. zu einer Bildfunktion gibt es überhaupt keine stetige Originalfunktion oder nur eine einzige stetige Originalfunktion.*

**Beispiel 4.1 (LT-n)**

(1) Für die **Heaviside-Funktion**  $h(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} L(p) &= \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A h(t) e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-pt} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ -\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ -\frac{e^{-pA}}{p} \right] + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Wegen  $\lim_{A \rightarrow \infty} e^{-pA} = \lim_{A \rightarrow \infty} [e^{-\sigma A} \cos \omega A - ie^{-\sigma A} \sin \omega A]$  und  $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\cos \omega A}{e^{\sigma A}} = 0$  sowie  $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega A}{e^{\sigma A}} = 0$  für  $\sigma > 0$  und  $A > 0$  gilt

$$\lim_{A \rightarrow \infty} e^{-pA} = 0, \quad \text{für } \operatorname{Re} p = \sigma > 0, \quad \text{also}$$

$$L(p) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ -\frac{e^{-pA}}{p} \right] + \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \quad \text{für } \sigma > 0.$$

(2) Für die Funktion  $f(t) = e^{at}$   $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$  erhält man

$$L(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(t) e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-(p-a)t} dt$$

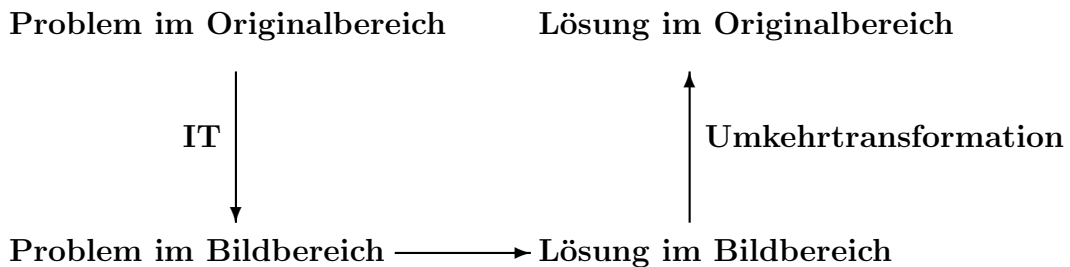
$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ -\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a} \right]_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ -\frac{e^{-(p-a)A}}{p-a} \right] + \frac{1}{p-a}.$$

Wegen  $\lim_{A \rightarrow \infty} e^{-(p-a)A} = \lim_{A \rightarrow \infty} [e^{-(\sigma-a_1)A} \cos((\omega-a_2)A) - ie^{-(\sigma-a_1)A} \sin((\omega-a_2)A)]$  und  $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\cos((\omega-a_2)A)}{e^{(\sigma-a_1)A}} = 0$  sowie  $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\sin((\omega-a_2)A)}{e^{(\sigma-a_1)A}} = 0$  für  $\sigma > a_1$  und  $A > 0$  gilt

$$\lim_{A \rightarrow \infty} e^{-(p-a)A} = 0, \quad \text{für } \operatorname{Re}(p-a) = \sigma - a_1 > 0, \quad \text{also}$$

$$L(p) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ -\frac{e^{-(p-a)A}}{p-a} \right] + \frac{1}{p-a} = \frac{1}{p-a} \quad \text{für } \sigma > a_1.$$

**ITn** werden in der Elektrotechnik, der Informationstheorie und der Nachrichtentechnik angewandt. Außerdem wird die **LT** für die Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungen verwendet. Man geht dabei folgendermaßen vor:



## 4.2 Eigenschaften der LT

Es seien die Voraussetzungen von Theorem 4.1 erfüllt.

Es mögen existieren:  $L[f(t)] = L(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$  für  $\operatorname{Re} p > c$   $L[f_k(t)] = L_k(p)$  für  $\operatorname{Re} p > c_k$ .

1° **Additionssatz:**  $L[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 L_1(p) + k_2 L_2(p)$   $\operatorname{Re} p > \max(c_1, c_2)$  und  $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ .

2° **Ähnlichkeitssatz:**  $L[f(at)] = \frac{1}{a} L\left(\frac{p}{a}\right)$  für  $a > 0$  und  $\operatorname{Re} p > ac$ .

3° **Erster Verschiebungssatz:**  $L[f(t-b)] = e^{-pb} L(p)$  für  $b \geq 0$  und  $\operatorname{Re} p > c$ .  
Dabei ist  $f(t-b)$  eine Verschiebung von  $f(t)$  nach rechts.

4° **Zweiter Verschiebungssatz:**  $L[f(t+b)] = e^{pb} \left( L(p) - \int_0^b e^{-pt} f(t) dt \right)$  für  $b \geq 0$   
und  $\operatorname{Re} p > c$ . Dabei ist  $f(t+b)$  eine Verschiebung von  $f(t)$  nach links.

5° **Dämpfungssatz:**  $L[e^{-at} f(t)] = L(p+a)$  für  $a \in \mathbb{R}$  und  $\operatorname{Re} p > c-a$ .

6° **Multiplikationssatz:**  $L[(-t)^n f(t)] = L^{(n)}(p)$  für  $\operatorname{Re} p > c$ .

7° **Divisionssatz:**  $L\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \int_p^\infty L(q) dq$  für  $\operatorname{Re} p > c$ , falls die **LT** der Funktion  $\frac{1}{t} f(t)$  existiert.

8° **Differentiationsatz:**

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n L(p) - f(+0)p^{n-1} - f'(+0)p^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(+0)$$

für  $n \in \mathbb{N}$  und  $\operatorname{Re} p > c$ , falls die **LT** der Funktion  $f^{(n)}$  existiert. Dabei ist  $f^{(k)}(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ). Ist  $f(t)$  für  $t \geq 0$   $n$ -mal stetig differenzierbar, so gilt  $f^{(k)}(+0) = f^{(k)}(0)$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ), d.h. die rechtsseitigen Grenzwerte fallen mit den Funktionswerten zusammen.

Speziell gilt:

$L[f'(t)] = pL(p) - f(+0)$  für  $\operatorname{Re} p > c$ , falls die **LT** der Funktion  $f'(t)$  existiert.

$L[f''(t)] = p^2 L(p) - f(+0)p - f'(+0)$  für  $\operatorname{Re} p > c$ , falls die **LT** der Funktion  $f''(t)$  existiert.

9° **Integrationssatz:**  $L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{p} L(p)$ , für  $\operatorname{Re} p > c$ .

10° **Faltungssatz:**  $L[f_1(t) * f_2(t)] = L_1(p) \cdot L_2(p)$  für  $\operatorname{Re} p > \max(c_1, c_2)$ . Dabei ist

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$$

Wegen  $f_k(t) = 0$  für  $t < 0$  ( $k = 1, 2$ ) ist auch  $f_1(t) * f_2(t) = 0$  für  $t < 0$ .

Die **Rücktransformation** in den Originalbereich erfolgt mit Hilfe dieser Eigenschaften und den **LT** für konkrete Funktionen gemäß Formelblatt zur Vorlesung.

**Beispiel 4.2**  $L(p) = \frac{1}{(p-a)(p-b)}$  mit  $a, b \in \mathbb{C}$  und  $a \neq b$ .

Wir verwenden den **Faltungssatz**:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{a\tau} e^{b(t-\tau)} d\tau = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}.$$

# 5 Gewöhnliche Differenzialgleichungen

## 5.1 Gewöhnliche Differenzialgleichungen 1. Ordnung

### 5.1.1 Definition und einfachste Spezialfälle

**Definition 5.1 (Gewöhnliche Differenzialgleichung 1. Ordnung, Lösung)**

1. Eine Beziehung der Form

$$y' = f(x, y) \quad (x, y) \in E \quad (E \text{ Teilmenge der Ebene}) \quad (5.1)$$

zwischen der unabhängigen Variablen  $x$ , der abhängigen Variablen  $y$  und der Ableitung  $y'$ , die für jeden Wert  $x$  aus dem Definitionsbereich  $X$  der gesuchten Funktion  $y = y(x)$  gilt, heißt **explizit** gegebene **gewöhnliche Differenzialgleichung (gDG) 1. Ordnung**.

2. Eine Beziehung der Form

$$F(x, y, y') = 0 \quad (5.2)$$

heißt **implizit** gegebene **gDG 1. Ordnung**.

3. **Lösung** von (5.1) bzw. (5.2) heißt jede Funktion  $y = y(x)$  ( $x \in X$ ) mit folgenden Eigenschaften:

1° Die Funktion  $y = y(x)$  ist in  $X$  einmal differenzierbar.

2° Nach Einsetzen von  $y(x)$ ,  $y'(x)$  in die **gDG** (5.1) bzw. (5.2) sind diese Gleichungen für jedes  $x \in X$  erfüllt.

Die zu  $y = y(x)$  gehörige Kurve in der  $xy$ -Ebene heißt **Lösungskurve**.

### Spezialfälle von gDG 1. Ordnung der Form (5.1)

$$(1) \quad y'(x) = f(x) \quad (x, y) \in E = \{(x, y) \mid a < x < b \wedge -\infty < y < +\infty\}$$

Sei  $f(x)$  stetig in  $]a, b[$ , dann besitzt  $f(x)$  in  $]a, b[$  eine Stammfunktion. Die Gesamtheit der **Lösungen** (das unbestimmte Integral)

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + C$$

ist eine einparametrische Kurvenschar. Die Konstante  $C$  lässt sich eindeutig festlegen, falls die **Lösung** in einem Punkt bekannt ist. Sei  $y(x_0) = y_0$  bekannt. Dann ist

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + y_0$$

diejenige **Lösung**, die durch den Punkt  $(x_0, y_0)$  hindurchgeht.

Sei z.B.  $y' = 2x$   $y(x) = x^2 + C$ . Dann ist  $y(x) = x^2 - x_0^2 + y_0$  diejenige Lösung, die durch den Punkt  $(x_0, y_0)$  hindurchgeht.

$$(2) \quad y'(x) = f(y) \quad (x, y) \in E = \{(x, y) \mid -\infty < x < +\infty \wedge c < y < d\}$$

Sei  $f(y)$  stetig in  $]c, d[$  und  $f(y) \neq 0$  für alle  $y \in ]c, d[$ . Nach der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion gilt:  $y'(x) = [x'(y)]^{-1}$ . Dann betrachtet man anstelle von  $y'(x) = f(y)$  die **gDG**  $x'(y) = 1/f(y) = g(y)$ . Nach (1) besitzt  $g(y)$  in  $]c, d[$  eine Stammfunktion und die Gesamtheit der Lösungen

$$x(y) = \int_{y_0}^y g(\tau) \, d\tau + C$$

ist wieder eine einparametrische Kurvenschar. Wegen  $f(y) \neq 0$  für alle  $y \in ]c, d[$  ist  $x(y)$  **streng monoton**, d.h. es existiert eine eindeutige Umkehrfunktion  $y = \varphi(x)$ .

### Definition 5.2 (Allgemeine Lösung, spezielle Lösung, Cauchy-Problem)

1. Die einparametrische Funktionenschar  $y = y(x, C)$  heißt **allgemeine Lösung** der **gDG** (5.1) in  $E$ , wenn bei entsprechender Auswahl der Konstanten  $C$  die Funktion  $y$  in eine beliebige **Lösung** dieser **gDG**, deren Lösungskurve in  $E$  liegt, übergeht.
2. Die Gleichung  $\Phi(x, y, C) = 0$  heißt **allgemeines Integral** der **gDG** (5.1) in  $E$ , wenn sie die **allgemeine Lösung** von (5.1) als implizit gegebene Funktion definiert.
3. Jede **Lösung**, die man durch Einsetzen eines fixierten Wertes für  $C$  erhält, heißt **spezielle** oder **partikuläre Lösung** von (5.1).
4. **Cauchy-Problem** oder **Anfangswertproblem (AWP)**: Gesucht ist eine **Lösung** von (5.1), welche im Punkt  $x_0 \in ]a, b[$  der **Anfangsbedingung (Ab)**  $y(x_0) = y_0$  genügt. Dabei ist  $(x_0, y_0)$  mit  $y(x_0) = y_0$  ein gewisser fixierter Punkt aus  $E$ .

#### 5.1.2 Geometrische Interpretation für gDG der Form $y' = f(x, y)$

Die Funktion  $f(x, y)$  sei in  $E$  definiert und eindeutig. Jedem Punkt  $(x_0, y_0) \in E$  wird mittels der **gDG** (5.1) ein **Richtungselement** zugeordnet:

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) = \tan \alpha_0.$$

### Definition 5.3 (Richtungsfeld, Isoklinen)

1. Die Gesamtheit der durch (5.1) den Punkten aus  $E$  zugeordneten **Richtungselemente** heißt **Richtungsfeld**.
2. Die Kurven, die alle Punkte mit gleich großem **Richtungselement**  $\tan \alpha = y' = k$  miteinander verbinden, heißen **Isoklinen (Neigungslinien)**. Sie bilden eine einparametrische Kurvenschar.

**Darstellung des Richtungsfeldes:** Durch jeden Punkt  $(x, y) \in E$  legt man ein Geradenstück, dessen Anstieg gleich dem diesen Punkt zugeordneten **Richtungselement**  $\tan \alpha$  ist.

### Graphisches Verfahren zur näherungsweise Lösung einer gDG der Form (5.1):

Es sei  $y(x) = \varphi(x)$  eine Lösung von (5.1), die durch  $(x_0, y_0)$  hindurchgeht. Dann ist

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = \tan \alpha_0.$$

Lösungen der gDG (5.1) sind also alle diejenigen Kurven, bei denen die Tangente in jedem Punkt den Anstieg besitzt, den das **Richtungsfeld** in diesem Punkt vorschreibt.

#### Beispiel 5.1 Richtungsfeld, Isoklinen

$$(1) \quad y' = -\frac{x}{y} \quad (0,0) \notin E. \text{ Setzen } y' = k = -\frac{x}{y}.$$

Die **Isoklinenschar** ist die Geradenschar  $y = \left(-\frac{1}{k}\right)x$ . Wegen  $k \left(-\frac{1}{k}\right) = -1$  steht die Tangente an die Lösungskurve in jedem Punkt senkrecht auf der **Isokline**, d.h. die Lösungskurven sind Kreise in Mittelpunktslage.

$$(2) \quad y' = \frac{y}{x} \quad (0,0) \notin E. \text{ Setzen } y' = k = \frac{y}{x}.$$

Die **Isoklinenschar** ist die Geradenschar  $y = kx$ . Sowohl der Anstieg der **Isokline** als auch der Anstieg der Lösungskurve hat den Wert  $k$ . Folglich sind die Lösungskurven Halbgeraden, die sämtlich im Punkt  $(0,0)$  münden.

#### 5.1.3 GDG mit trennbaren Variablen

Eine **gDG mit trennbaren Variablen** hat die Gestalt:

$$y' = f_1(x)f_2(y) \quad (f(x,y) = f_1(x)f_2(y)) \quad (5.3)$$

**Theorem 5.1** Sei  $f_1(x)$  stetig in  $]a, b[$ ,  $f_2(y)$  stetig und  $f_2(y) \neq 0$  in  $]c, d[$ . Dann geht durch jeden Punkt  $(x_0, y_0)$  des Rechtecks  $Q = \{(x, y) \mid a < x < b \wedge c < y < d\}$  genau eine Lösungskurve der **gDG** (5.3) hindurch.

#### Lösungsverfahren zur Berechnung des allgemeinen Integrals

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y) \implies \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \implies \int_{y_0}^y \frac{d\tau}{f_2(\tau)} = \int_{x_0}^x f_1(t) dt + C$$

Auflösung nach  $y$  (falls möglich!) liefert die **allgemeine Lösung**.

#### 5.1.4 Lineare gDG 1. Ordnung

Eine **lineare gDG (lgDG)** hat die Gestalt:

$$y' + a_0(x)y = g(x) \quad (f(x,y) = g(x) - a_0(x)y) \quad (5.4)$$

**Theorem 5.2** Seien  $a_0(x)$  und  $g(x)$  stetig in  $]a, b[$ . Dann geht durch jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in E = \{(x, y) \mid a < x < b \wedge -\infty < y < +\infty\}$  genau eine Lösungskurve der **gDG** (5.4), die für alle  $x \in ]a, b[$  definiert ist, hindurch.

**Definition 5.4** Ist die rechte Seite  $g(x) = 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ , so heißt die **lgDG** (5.4) **homogen**, sonst heißt sie **inhomogen**. Die Funktion  $a_0(x)$  heißt **Koeffizient** von (5.4).

### Berechnung der allgemeinen Lösung einer homogenen lgDG 1. Ordnung

$$y' + a_0(x)y = 0 \text{ - gDG mit trennbaren Variablen} \quad (5.5)$$

$$\frac{dy}{y} = -a_0(x) dx$$

$$\ln \left| \frac{y}{C} \right| = - \int_{x_0}^x a_0(t) dt$$

$$\left| \frac{y}{C} \right| = e^{- \int_{x_0}^x a_0(t) dt}$$

$$y_a^h(x) = C e^{- \int_{x_0}^x a_0(t) dt} = C y_s^h(x) \text{ - allgemeine Lösung von (5.5).} \quad (5.6)$$

Dabei ist  $y_s^h(x) = e^{- \int_{x_0}^x a_0(t) dt}$  eine **spezielle Lösung** von (5.5) und  $C$  eine Integrationskonstante. Die Funktion  $y = 0$  ist auch eine Lösung von (5.5).

Die Gleichungen (5.4) und (5.5) besitzen keine gemeinsamen Lösungen. Deshalb wird zur Lösung von (5.4) ein Lösungsansatz der Form (5.6) verwendet, wobei  $C = C(x)$  gesetzt wird und  $y_s^h(x)$  eine **spezielle Lösung** von (5.5) ist:

$$y_a^{inh} = C(x)y_s^h \quad (y_a^{inh})' = C'(x)y_s^h + C(x)(y_s^h)'. \quad (5.7)$$

Dabei wird  $C(x)$  derart bestimmt, dass  $y_a^{inh}(x) = C(x)y_s^h(x)$  die Gleichung (5.4) löst. Dieses Verfahren heißt **Variation der Konstanten**.

Einsetzen von (5.7) in (5.4) liefert

$$\begin{aligned} C'(x)y_s^h + C(x)(y_s^h)' + a_0(x)C(x)y_s^h &= g(x) \\ C'(x)y_s^h + C(x)[(y_s^h)' + a_0(x)y_s^h] &= g(x). \end{aligned}$$

Da  $y_s^h(x)$  eine **spezielle Lösung** von (5.5) ist, gilt:  $(y_s^h)' + a_0(x)y_s^h = 0$  und man erhält zur Bestimmung von  $C(x)$  eine **gDG** der Form  $C'(x)y_s^h(x) = g(x)$ . Wegen  $y_s^h(x) \neq 0$  ist nämlich

$$\begin{aligned} C'(x) &= \frac{g(x)}{y_s^h(x)} \quad \text{und} \\ C(x) &= \int_{x_0}^x \frac{g(t)}{y_s^h(t)} dt + D, \end{aligned} \quad (5.8)$$

wobei  $D$  wieder eine willkürliche Konstante ist. Einsetzen von (5.8) in die erste Formel in (5.7) ergibt die **allgemeine Lösung** von (5.4)

$$y_a^{inh}(x) = y_s^h(x) \int_{x_0}^x \frac{g(t)}{y_s^h(t)} dt + D y_s^h(x). \quad (5.9)$$

Dabei ist  $y_a^h(x) = D y_s^h(x)$  wieder die **allgemeine Lösung** von (5.5) und  $y_s^{inh}(x) := y_s^h(x) \int_{x_0}^x \frac{g(t)}{y_s^h(t)} dt$  eine **spezielle Lösung** von (5.4).



**Theorem 5.3** Seien  $a_{ik}(x)$  ( $i, k = 1, \dots, n$ ) und  $g_i(x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) stetig sowie beschränkt in  $]a, b[$ . Ferner sei  $x_0 \in ]a, b[$ ,  $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0 \in \mathbb{R}$ . Dann existiert genau eine Lösung  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$  von (5.10), für die gilt:

$$\mathbf{y}(x_0) = \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}.$$

Unter den Voraussetzungen von Theorem 5.3 ist das **AWP** für **lineare Systeme** stets **eindeutig lösbar**.

### 5.2.2 Lösungsstruktur linearer Systeme

Die Theorie der Lösungsstruktur **linearer Systeme** lässt sich analog zur Theorie der Lösungsstruktur von **IGS** aufbauen. Gesucht sind alle Lösungen des **linearen Systems** (5.11) bzw. (5.10), d.h., gesucht ist eine geeignete Darstellung der (unendlichen) Lösungsmenge.

**Problem:** Kann man stets eine **endliche** Anzahl **linear unabhängiger Lösungen**  $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^p$  des Systems (5.11) auswählen, derart, dass sich **jede Lösung** von (5.11) als **Linearkombination** von  $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^p$  darstellen lässt?

**Lemma 5.1** Die Menge der **Lösungsvektoren** des **homogenen linearen Systems** (5.11) erzeugt einen **Unterraum**  $L^{hom}$  des **Vektorraumes**  $C[a, b]$ , wobei  $\dim L^{hom} = n$  gilt.

**Definition 5.7 (Fundamentalsystem, allgemeine Lösung eines homogenen IGS)**

1. Jede **Basis** des  $n$ -dimensionalen **Unterraumes**  $L^{hom}$  des **homogenen linearen Systems** (5.11) heißt ein **Fundamentalsystem** von (5.11).
2. Bilden die **Lösungen**  $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^n$  ein **Fundamentalsystem** von (5.11), so heißt  $\mathbf{y}_a^h = C_1 \mathbf{y}^1 + C_2 \mathbf{y}^2 + \dots + C_n \mathbf{y}^n$  mit **beliebigen Konstanten**  $C_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) die **allgemeine Lösung** des **homogenen linearen Systems** (5.11).

**Theorem 5.4 (Lösungsstruktur unter Verwendung des Begriffs allgemeine Lösung)**

- (1) Die **allgemeine Lösung**  $\mathbf{y}_a^h$  von (5.11) erzeugt einen **Unterraum** der Dimension  $n$  des **Vektorraumes**  $C[a, b]$ . Jede **Lösung** von (5.11) lässt sich als **Linearkombination** eines beliebigen **Fundamentalsystems** von (5.11) darstellen.
- (2) Die **allgemeine Lösung**  $\mathbf{y}_a^{inh}$  eines **inhomogenen linearen Systems** der Form (5.10) setzt sich **additiv** zusammen aus einer **speziellen Lösung**  $\mathbf{y}_s^{inh}$  von (5.10) und der **allgemeinen Lösung**  $\mathbf{y}_a^h$  des zugehörigen **homogenen IGS** (5.11).



- 1° Alle **Eigenwerte** von **A** seien reell und voneinander verschieden, d.h. zu jedem Eigenwert gibt es genau einen Eigenvektor. Es sei

$$\mathbf{P}^i = \begin{pmatrix} P_{1i} \\ P_{2i} \\ \vdots \\ P_{ni} \end{pmatrix}$$

der zum **Eigenwert**  $\lambda_i$  gehörende **Eigenvektor**. Man erhält ein **Fundamentalsystem** der Gestalt

$$\mathbf{y}^1(x) = \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ \vdots \\ P_{n1} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x}, \mathbf{y}^2(x) = \begin{pmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ \vdots \\ P_{n2} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 x}, \dots, \mathbf{y}^n(x) = \begin{pmatrix} P_{1n} \\ P_{2n} \\ \vdots \\ P_{nn} \end{pmatrix} e^{\lambda_n x}$$

und die **allgemeine Lösung** in der Form

$$\mathbf{y}_a^h(x) = C_1 \mathbf{y}^1(x) + C_2 \mathbf{y}^2(x) + \dots + C_n \mathbf{y}^n(x).$$

- 2° Ein oder mehrere **Eigenwerte** treten mehrfach auf. Sei  $\lambda_k$  ein **Eigenwert** der Vielfachheit  $s$ .

Falls zu  $\lambda_k$   $s$  **linear unabhängige Eigenvektoren**  $\mathbf{P}^i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) gehören, so hat der zu  $\lambda_k$  gehörige Lösungsanteil die Gestalt:

$$\mathbf{y}_a^k(x) = (C_1 \mathbf{P}^1 + C_2 \mathbf{P}^2 + \dots + C_s \mathbf{P}^s) e^{\lambda_k x}.$$

Falls zu  $\lambda_k$   $m < s$  **linear unabhängige Eigenvektoren** gehören, so suchen wir den zu  $\lambda_k$  gehörige Lösungsanteil in der Form

$$\mathbf{y}^k(x) = \begin{pmatrix} A_{11} + A_{12}x + \dots + A_{1(s-m+1)}x^{s-m} \\ A_{21} + A_{22}x + \dots + A_{2(s-m+1)}x^{s-m} \\ \vdots \\ A_{n1} + A_{n2}x + \dots + A_{n(s-m+1)}x^{s-m} \end{pmatrix} e^{\lambda_k x}. \quad (5.14)$$

Dieser Lösungsansatz wird in das Differenzialgleichungssystem eingeführt. Mittels Koeffizientenvergleich erhält man ein **IGS** bezüglich der Unbekannten  $A_{11}, \dots, A_{n(s-m)}$ , dessen **allgemeine Lösung** zu bestimmen ist. Diese hängt von  $s$  beliebigen Konstanten ab, wobei  $s$  die Vielfachheit des **Eigenwertes**  $\lambda_k$  ist.

- 3° Ist  $\lambda = \alpha + i\beta$  ein einfacher komplexer **Eigenwert**, so ist  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  ebenfalls ein einfacher komplexer **Eigenwert** der Matrix **A**. Mit dem Lösungsansatz  $\mathbf{z}^1 = \mathbf{P}^1 e^{(\alpha+i\beta)x}$ ,  $\mathbf{z}^2 = \mathbf{P}^2 e^{(\alpha-i\beta)x}$  erhält man  $\mathbf{P}^1$  und  $\mathbf{P}^2$  ebenfalls zueinander konjugiert komplex. Setzt man  $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P} + i\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} - i\mathbf{Q}$  (**P**, **Q** reell), so ergibt sich eine reelle Form der zu diesem Paar konjugiert komplexer **Eigenwerte** gehörigen Lösungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1(x) &= \operatorname{Re} \mathbf{z}^1(x) = e^{\alpha x} [\mathbf{P} \cos(\beta x) - \mathbf{Q} \sin(\beta x)] \\ \mathbf{y}^2(x) &= \operatorname{Im} \mathbf{z}^1(x) = e^{\alpha x} [\mathbf{P} \sin(\beta x) + \mathbf{Q} \cos(\beta x)]. \end{aligned}$$

4° Ist  $\lambda = \alpha + i\beta$  ein  $s$ -facher komplexer **Eigenwert**, so verfährt man wie bei einem reellen  $s$ -fachen **Eigenwert** und nimmt dann als Lösungsanteile von  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  Real- und Imaginärteil des berechneten Lösungsvektors.

## Berechnung der allgemeinen Lösung des inhomogenen Systems (5.13)

Ist die **allgemeine Lösung** des zu (5.13) **homogenen linearen Systems** bekannt, so erhält man die **allgemeine Lösung** von (5.13) mittels Variation der Konstanten. Falls **Ab** gemäß Definition 5.6 vorgegeben sind, lässt sich das **AWP eindeutig** lösen.

## 5.3 LgDG n-ter Ordnung

### 5.3.1 Allgemeine Bemerkungen

**Definition 5.8** Ein Differenzialausdruck der Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad (5.15)$$

heißt **inhomogene lgDG n-ter Ordnung** ( $n > 1$ ). Analog zu **lgDG 1.Ordnung** heißt ein Differenzialausdruck der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (5.16)$$

die zu (5.15) **homogene lgDG n-ter Ordnung**. Die Funktionen  $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$  nennt man die **Koeffizienten der lgDG**, während  $g(x)$  rechte Seite der **lgDG** heißt.

Jede **lgDG** der Gestalt (5.15) kann mittels der neuen abhängigen Variablen  $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$  in ein **lineares System** von  $n$  **lgDG 1. Ordnung** überführt werden: Es ist  $y'_1 = y', y'_2 = y_2, \dots, y'_n = y^{(n)}$  und

$$y'_1 = y_2, y'_2 = y_3, \dots, y'_n = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \dots - a_{(n-1)} y_n + g,$$

wobei  $y_1, y_2, \dots, y_n$  die gesuchten Funktionen sind.

**Beispiel 5.3**  $y''' - y = 0 \implies y'_1 = y_2, y'_2 = y_3, y'_3 = y_1$

Die Umwandlung eines Systems in eine **lgDG n-ter Ordnung** ist nur unter bestimmten Voraussetzungen möglich.

**Definition 5.9 Cauchy-Problem oder Anfangswertproblem (AWP):** Gesucht ist eine Lösung von (5.15) bzw. (5.16), welche im Punkt  $x_0 \in ]a, b[$  der **Anfangsbedingung (Ab)**  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$  genügt.

**Theorem 5.6** Seien  $a_i(x)$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) und  $g(x)$  stetig in  $]a, b[$ . Ferner sei  $x_0 \in ]a, b[, y_0, y'_0, \dots, y_0^{n-1} \in \mathbb{R}$ . Dann existiert genau eine Lösung  $y = y(x)$  von (5.15) bzw. (5.16), für die gilt:  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ .

Unter den Voraussetzungen von Theorem 5.6 ist das **AWP** für **lgDG n-ter Ordnung** stets **eindeutig lösbar**.

Das Lemma 5.1, die Definition 5.7 und das Theorem 5.4 lassen sich auf **lgDG n-ter Ordnung** übertragen.

**Theorem 5.7**  $n$  Lösungen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  einer **homogenen lgDG n-ter Ordnung** der Form (5.16) repräsentieren ein **Fundamentalsystem** von (5.16) gdw die Determinante, gebildet aus den Funktionen und ihren Ableitungen bis zur Ordnung  $n - 1$ , für alle Werte von  $x$  aus dem gemeinsamen Definitionsbereich der Lösungsfunktionen von Null verschieden ist:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Diese Determinante heißt ebenfalls **Wronskische Determinante**.

Für  $n > 1$  gibt es außer den **Ab** noch andere technisch wichtige zusätzliche Bedingungen, die die **Eindeutigkeit** gewährleisten.

**Beispiel 5.4**  $y'' = 0 \implies y' = C_1 \implies y = y(x) = C_1 x + C_2$

Die **allgemeine Lösung** der **lgDG**  $y'' = 0$  stellt eine **zweiparametrische Kurvenschar** dar. **Lösung** ist jede Gerade in der  $xy$ -Ebene mit Ausnahme der Geraden parallel zur  $y$ -Achse. Die **willkürlichen Konstanten**  $C_1$  und  $C_2$  lassen sich i. Allg. durch Vorgabe von zwei Zusatzbedingungen **eindeutig** festlegen.

(1) **Anfangsbedingungen (Ab)**  $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \implies y = 2x + 1$

*Geometrisch: Es ist die spezielle Gerade gesucht, die durch den Punkt  $(0, 1)$  geht und die den Anstieg 2 besitzt.*

(2) **Randbedingungen (Rb)**

1°  $y(0) = 1, \quad y(1) = 2 \implies y = x + 1$

*Geometrisch: Es ist die spezielle Gerade gesucht, die durch die Punkte  $(0, 1)$  und  $(1, 2)$  hindurchgeht.*

2°  $y'(0) = 1, \quad y'(1) = 2 \implies y'(x) = C_1 \quad y'(0) = C_1 = 1 \wedge y'(1) = C_1 = 2 \implies$   
*Widerspruch ( $C_1, C_2$  lassen sich nicht ermitteln).*

*Geometrisch: Es gibt keine Gerade, die im Punkt 0 den Anstieg 1 und im Punkt 1 den Anstieg 2 besitzt.*

3°  $y'(0) = 1, \quad y'(1) = 1 \implies y'(0) = C_1 = 1 \wedge y'(1) = 1 \implies y = x + C_2$   
*(einparametrische Kurvenschar).*

*Geometrisch: Es gibt unendlich viele Geraden, die die vorgegebenen Bedingungen erfüllen.*

Die im Beispiel 5.4 (2) betrachteten Aufgaben heißen **Randwertprobleme (RWP)**. Im Gegensatz zu den **AWP** für **lgDG** von Typ (5.15) sind sie nicht immer lösbar und falls sie lösbar sind, ist die Lösung nicht immer eindeutig.

**LgDG** höherer Ordnung mit variablen Koeffizienten kann man in vielen Fällen mit Hilfe eines **Potenzreihenansatzes** lösen.

### 5.3.2 LgDG n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die **lgDG** (5.15) hat jetzt die Gestalt:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \quad a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i. \quad (5.17)$$

#### 1. Algebraisches Lösungsverfahren

Für **homogene lgDG n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten** führt der Lösungsansatz  $y = e^{\lambda x}$  analog wie bei **linearen Systemen** auf ein algebraisches Lösungsverfahren. Die **inhomogene lgDG** der Form (5.17) ist mit der **Konstantenvariation** lösbar. Der Ansatz  $y = e^{\lambda x}$  überführt die Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \quad (5.18)$$

in den algebraischen Ausdruck  $P_n(\lambda) e^{\lambda x}$  mit dem **charakteristischen Polynom** vom Grade  $n$

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0,$$

dessen **NSn** zu bestimmen sind. Es treten vier Fälle auf:

- 1°  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit der Vielfachheit 1. Dann ist  $e^{\lambda x}$  der Lösungsanteil, der dieser **NS** entspricht.
- 2°  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit der Vielfachheit  $s > 1$ . Dann ist  $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{s-1} e^{\lambda x}$  der Lösungsanteil, der dieser **NS** entspricht.
- 3°  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  mit der Vielfachheit 1. Da  $a_i \in \mathbb{R}$ , ist auch  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  **NS** des **charakteristischen Polynoms** mit der Vielfachheit 1. Dann ist  $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$  der Lösungsanteil, der dem Paar zueinander konjugiert komplexen **NS** der Vielfachheit 1 entspricht.
- 4°  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  mit der Vielfachheit  $s > 1$ . Dann ist

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x e^{\alpha x} \sin \beta x \dots \\ x^{s-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x^{s-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

der Lösungsanteil, der dem Paar zueinander konjugiert komplexen **NS** der Vielfachheit  $s > 1$  entspricht.

Die **allgemeine Lösung** der **homogenen** Gleichung (5.18) lässt sich als Linearkombination der **speziellen Lösungen** gemäß 1° – 4° mit  $n$  beliebigen Konstanten darstellen. Man kann zeigen, dass dabei stets  $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$  gilt.

Speziell sind für  $n = 2$  folgende Formen der **allgemeinen Lösung** möglich:

- 1°  $y_a^h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ , falls  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,
- 2°  $y_a^h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$ , falls  $\lambda_1 = \lambda_2 \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}$ ,
- 3°  $y_a^h(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ , falls  $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

#### 2. Operatorenmethode

Die **lgDG** wird mittels einer **IT** in eine algebraische Gleichung überführt. Diese lässt sich in vielen Fällen auf einfache Art und Weise lösen. Anschließend ist die **Rücktransformation** durchzuführen. Für **AWP** ist die **LT** besonders geeignet, da der **Differenziationssatz** die **Anfangswerte** enthält.

## 6 Anhang

### Beispiel 6.1 (gDG mit trennbaren Variablen)

(1)  $y' = -x/y \implies y dy = -x dx \implies \Phi(x, y, C) = x^2 + y^2 - C^2 = 0$  **allgemeines Integral.**

(2)  $y' = y/x \implies \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \implies y = C x$  **allgemeine Lösung.**

### Beispiel 6.2 (homogene lgDG, inhomogene lgDG)

(1) *In welcher Zeit kühlt sich ein Körper, der auf  $100^\circ C$  erhitzt wurde, bei einer Außentemperatur von  $0^\circ C$  auf  $25^\circ C$  ab, wenn er sich in 10 Minuten bis auf  $50^\circ$  abkühlt?*

**Annahme:** Die Abkühlgeschwindigkeit des Körpers sei proportional der Temperaturdifferenz von Körper und Außentemperatur.

#### Berechnung der allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned}u' &= -k u & (k > 0) \\ \frac{du}{u} &= -k dt \\ \ln \left| \frac{u}{D} \right| &= -kt \\ u &= D e^{-kt}\end{aligned}$$

**Berechnung von D (Lösung eines AWP):** Für  $t = 0$  ist  $u(0) = 100$ . Einsetzen in die allgemeine Lösung liefert  $D = 100$ . Man erhält die **spezielle Lösung**

$$u(t) = 100 e^{-kt},$$

die durch den Punkt  $(t_0, u_0) = (0, 100)$  hindurchgeht.

**Ermittlung von k (Lösung eines inversen Problems):** Für  $t = 10$  ist  $u(10) = 50$ . Es ist

$$50 = 100 e^{-k10} \implies k = \frac{\ln 2}{10}.$$

Man erhält:

$$u(t) = 100 e^{-\frac{\ln 2}{10}t} = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}.$$

**Wann hat sich der Körper auf  $25^\circ C$  abgekühlt?** Gesucht ist der Wert  $t$ , für den  $u(t) = 25$  gilt:

$$25 = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} \implies 2^{-2} = 2^{-\frac{t}{10}} \implies t = 20 \text{ [min]}.$$

(2) *An eine Spule mit dem Ohmschen Widerstand  $R$  und der Selbstinduktivität  $L$  werde zur Zeit  $t = 0$  eine konstante Spannung  $U$  angelegt. Zu ermitteln ist die in der anfangs stromlosen Spule durch den Einschaltvorgang bestimmte Stromstärke  $I(t)$ .*

Nach dem **2. Kirchhoffschen Gesetz** gilt:  $L \dot{I} + R I = U$ .

**Berechnung der allgemeinen Lösung der homogenen lgDG:**

$$L \dot{I} + R I = 0 \implies \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \implies I(t) = C e^{-\frac{R}{L}t}$$

**Berechnung der allgemeinen Lösung der inhomogenen lgDG:**

$$I(t) = C(t) e^{-\frac{R}{L}t} \implies I(t) = \frac{U}{R} + D e^{-\frac{R}{L}t}$$

**Berechnung von  $D$  (Lösung eines AWP):** Für  $t = 0$  ist  $I(0) = 0$

$$I(t) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Man erhält die **spezielle Lösung**, die durch den Punkt  $(t_0, I_0) = (0, 0)$  hindurchgeht.

Die Stromstärke nähert sich asymptotisch ihrer durch den Ohmschen Widerstand bedingten Größe.

(3) **(Wachstumsmodell für das Volkseinkommen nach Boulding)**

Wir bezeichnen mit  $y(t)$  das Volkseinkommen, mit  $c(t)$  den Konsum sowie mit  $i(t)$  die Investitionen, ferner sei  $t \geq 0$  und treffen folgende Modellannahmen:

$$\begin{aligned} y(t) &= c(t) + i(t), \\ c(t) &= \alpha + \beta y(t) \quad (\alpha \geq 0, 0 < \beta < 1) \\ \dot{y}(t) &= \gamma i(t) \quad (\gamma > 0). \end{aligned}$$

Dabei beschreibt  $\alpha$  den einkommensunabhängigen Konsumanteil,  $\beta$  den Proportionalitätsfaktor für den einkommensabhängigen Konsum und  $\gamma$  den Anteil der Investitionen, um den sich das Volkseinkommen ändert.

Verknüpft man die drei Annahmen miteinander, so erhält man das **Bouldingsche Modell** in Form einer **inhomogenen lgDG 1. Ordnung**

$$\dot{y}(t) - \gamma(1 - \beta)y(t) = -\alpha\gamma \quad t \geq 0.$$

mit einem konstanten Koeffizienten  $a(t) = -\gamma(1 - \beta)$  und einer rechten Seite  $g(t) = -\alpha\gamma$ . Die **allgemeine Lösung der inhomogenen lgDG** lautet

$$y(t) = C e^{\gamma(1-\beta)t} + \frac{\alpha}{1-\beta}.$$

Für  $y(0) = y_0$  ergibt sich wegen  $y_0 = C + \frac{\alpha}{1-\beta}$  bzw.  $C = y_0 - \frac{\alpha}{1-\beta}$

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{\alpha}{1-\beta}\right) e^{\gamma(1-\beta)t} + \frac{\alpha}{1-\beta}$$

als Lösung des AWP.

**Beispiel 6.3 (Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten)**

- (1) Lösung für Beispiel 5.2. Es wird eine Lösung in der Form  $\mathbf{y} = \mathbf{P} e^{\lambda x}$  gesucht. Einsetzen dieses Lösungsansatzes in das System und Kürzen des nicht verschwindenden Faktors  $e^{\lambda x}$  liefert die **charakteristische Gleichung** oder das **charakteristische Polynom** der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$ :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} (-1/3 - \lambda) & 2/3 \\ 4/3 & (1/3 - \lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = +1 \quad \begin{array}{l} -4/3 P_{11} + 2/3 P_{21} = 0 \\ +4/3 P_{11} - 2/3 P_{21} = 0 \end{array} \quad \mathbf{P}^1 = \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ +2 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = -1 \quad \begin{array}{l} +2/3 P_{12} + 2/3 P_{22} = 0 \\ +4/3 P_{12} + 4/3 P_{22} = 0 \end{array} \quad \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Daher bilden die beiden Vektoren

$$\mathbf{y}^1 = \mathbf{P}^1 e^x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^x, \quad \text{und} \quad \mathbf{y}^2 = \mathbf{P}^2 e^{-x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

ein **Fundamentalsystem** des **homogenen linearen Systems**. Die **allgemeine Lösung** hat die Gestalt

$$\mathbf{y}_a^h(x) = C_1 \mathbf{y}^1(x) + C_2 \mathbf{y}^2(x) = \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ 2C_1 e^x - C_2 e^{-x} \end{pmatrix}.$$

- (2) Gesucht ist die **allgemeine Lösung** des **inhomogenen linearen Systems**

$$\begin{array}{l} y_1' = y_1 - y_2 + x \\ y_2' = 4y_1 - 3y_2 + 2. \end{array} \quad (6.1)$$

Zunächst bestimmt man die **allgemeine Lösung** des zu (6.1) **homogenen linearen Systems**. Die **charakteristische Gleichung** von  $\mathbf{A}$  hat die Gestalt:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} (1 - \lambda) & -1 \\ 4 & (-3 - \lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

und besitzt eine Nullstelle  $\lambda_1 = -1$  der Vielfachheit 2. Es gilt  $n = 2, r = 1$ , also  $m = n - r = 1$ . Nach Theorem 4.2 (Skript Mathematik II, S. 43) gibt es zum **Eigenwert** der Vielfachheit  $s = 2$  genau einen **Eigenvektor**. Deshalb ist der Lösungsansatzes (5.14) zu verwenden. Einsetzen des speziellen Lösungsansatzes

$$\mathbf{y}_a^h(x) = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 x) e^{-x} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_{11} + A_{12} x) e^{-x} \\ (A_{21} + A_{22} x) e^{-x} \end{pmatrix}$$

in das zu (6.1) **homogene lineare System** führt auf das **IGS**

$$\begin{array}{rclcl} -2A_{11} + A_{21} + A_{12} & & & & = 0 \\ -4A_{11} + 2A_{21} & & & + A_{22} & = 0 \\ & & -2A_{12} + A_{22} & & = 0 \\ & & -4A_{12} + 2A_{22} & & = 0 \end{array}$$

dessen Koeffizientenmatrix den **Rang** 2 besitzt. Wählt man  $A_{11} = C_1$  und  $A_{12} = C_2$ , so erhält man für die übrigen zwei Variablen  $A_{21} = 2C_1 - C_2$  und  $A_{22} = 2C_2$ . Die **allgemeine Lösung** hat die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_a^h(x) &= C_1 \mathbf{y}^1(x) + C_2 \mathbf{y}^2(x) = \begin{pmatrix} (C_1 + C_2 x) e^{-x} \\ (2C_1 - C_2) + 2C_2 x \end{pmatrix} e^{-x} \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} x \\ 2x - 1 \end{pmatrix} e^{-x}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Variation der Konstanten mit dem Ansatz

$$C_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2(x) \begin{pmatrix} x \\ 2x - 1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

liefert das **IGS**

$$\begin{aligned} C_1'(x) + x C_2'(x) &= x e^x \\ 2 C_1'(x) + (2x - 1) C_2'(x) &= 2 e^x \end{aligned}$$

bezüglich der Unbekannten  $C_1'(x)$  und  $C_2'(x)$ . Man erhält

$$C_1'(x) = (-2x^2 + 3x) e^x, \quad C_2'(x) = (2x - 2) e^x.$$

Nach partieller Integration ergibt sich

$$C_1(x) = (-2x^2 + 7x - 7) e^x + D_1, \quad C_2(x) = (2x - 4) e^x + D_2. \quad (6.3)$$

Ersetzt man in (6.2) die Konstanten  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ) durch die Funktionen  $C_i(x)$  und verwendet (6.3), so erhält man die **allgemeine Lösung des inhomogenen linearen Systems**

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_a^{inh}(x) &= \mathbf{y}_s^{inh}(x) + \mathbf{y}_a^h(x) \\ &= \begin{pmatrix} 3x - 7 \\ 4x - 10 \end{pmatrix} + D_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-x} + D_2 \begin{pmatrix} x \\ 2x - 1 \end{pmatrix} e^{-x}. \end{aligned}$$

(3) Gesucht ist die **allgemeine Lösung des homogenen linearen Systems**

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - y_2 \\ y_2' &= 5y_1 + 2y_2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Die **charakteristische Gleichung** von  $\mathbf{A}$  hat die Gestalt:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} (4 - \lambda) & -1 \\ 5 & (2 - \lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

und besitzt die komplexen Wurzeln  $\lambda_1 = 3 + 2i$  und  $\lambda_2 = 3 - 2i$ . Für  $\lambda_1 = 3 + 2i$  bestimmen wir den zugehörigen **Eigenvektor** aus den **IGS**

$$\begin{pmatrix} (1 - 2i) & P_{11} & - & P_{21} & = & 0 \\ 5 & P_{11} & - & (1 + 2i) & P_{21} & = & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}^1 = \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix}.$$

Man erhält eine **spezielle Lösung** in komplexer Form

$$\mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} e^{(3+2i)x} = \begin{pmatrix} e^{3x}(\cos(2x) + i \sin(2x)) \\ (1 - 2i)e^{3x}(\cos(2x) + i \sin(2x)) \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Da (6.4) reelle Koeffizienten besitzt, braucht man die **spezielle Lösung**, die dem **Eigenwert**  $\lambda_2 = 3 - 2i$  entspricht, nicht zu berechnen. Sie ist durch den konjugiert komplexen Ausdruck zu (6.5) gegeben. Realteil und Imaginärteil von (6.5) liefern das gesuchte **Fundamentalsystem**:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1 &= \operatorname{Re} \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} e^{3x} \cos(2x) \\ e^{3x} (\cos(2x) + 2 \sin(2x)) \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ \mathbf{y}^2 &= \operatorname{Im} \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} e^{3x} \sin(2x) \\ e^{3x} (\sin(2x) - 2 \cos(2x)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die **allgemeine Lösung** hat die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_a^h(x) &= C_1 \mathbf{y}^1(x) + C_2 \mathbf{y}^2(x) \\ &= \begin{pmatrix} C_1 e^{3x} \cos(2x) + C_2 e^{3x} \sin(2x) \\ C_1 e^{3x} (\cos(2x) + 2 \sin(2x)) + C_2 e^{3x} (\sin(2x) - 2 \cos(2x)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Beispiel 6.4** Die lgDG  $y^{(6)} + y^{(4)} - y'' - y = 0$  besitzt die **charakteristische Gleichung**  $\lambda^6 + \lambda^4 - \lambda^2 - 1 = 0$  mit den Lösungen  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_{3/4} = i$ ,  $\lambda_{5/6} = -i$  und besitzt demzufolge die **allgemeine Lösung**

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (C_3 + C_4 x) \cos x + (C_5 + C_6 x) \sin x.$$

**Beispiel 6.5** (Lösung von lgDL mit Hilfe der LT)

(1) Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) + y(t) = \sin t \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1. \quad \text{Setzen } L[y(t)] = Y(p).$$

$$L[y''(t) + y(t)] = p^2 Y(p) - y(+0)p - y'(+0) + Y(p) = (p^2 + 1)Y(p) - 1 \quad \text{und}$$

$$L[\sin t] = \frac{1}{p^2 + 1}$$

geht das Anfangswertproblem im Originalbereich in die folgende Gleichung im Bildbereich über:

$$(p^2 + 1)Y(p) - 1 = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Als Lösung im Bildbereich erhält man

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \left( 1 + \frac{1}{p^2 + 1} \right) = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Die Rücktransformation in den Originalbereich erfolgt mit Hilfe des **Additionssatzes** und des **Faltungssatzes**:

$$y(t) = \sin t + \sin t * \sin t = \sin t + \int_0^t \sin \tau \sin(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = \sin t + \frac{1}{2} \int_0^t (\cos(2\tau - t) - \cos t) d\tau = \sin t + \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(2\tau - t)}{2} \right]_0^t - \frac{1}{2} t \cos t$$

$$y(t) = \sin t + \frac{1}{4} \sin t + \frac{1}{4} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t = \frac{3}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \quad \text{für } t \geq 0.$$

- (2) Wir betrachten eine  $\mathcal{RLC}$ -Reihenschaltung mit einer Spannung  $U(t) = 0$  für  $t < 0$ . Das 2. Kirchhoffsche Gesetz (Maschensatz) liefert

$$\mathcal{R}I(t) + \mathcal{L}\dot{I}(t) + \frac{1}{\mathcal{C}} \int_0^t I(\tau) d\tau = U(t) \quad I(0) = 0.$$

Nach Ausführung der  $\mathbf{LT}$  erhält man im Bildbereich, wenn  $I(p)$  den Bildstrom und  $U(p)$  die Bildspannung bezeichnet:

$$\mathcal{R}I(p) + \mathcal{L}pI(p) - \mathcal{L}I(+0) + \frac{1}{\mathcal{C}p}I(p) = U(p). \text{ Im Bildbereich erhält man}$$

$$I(p) = \frac{U(p)}{\mathcal{R} + \mathcal{L}p + \frac{1}{\mathcal{C}p}} = \frac{U(p)p}{\mathcal{L}p^2 + \mathcal{R}p + \frac{1}{\mathcal{C}}}.$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung  $\mathcal{L}p^2 + \mathcal{R}p + \frac{1}{\mathcal{C}} = \mathcal{L} \left( p^2 + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}}p + \frac{1}{\mathcal{C}\mathcal{L}} \right) = 0$  lauten

$$p_1 = -\frac{\mathcal{R}}{2\mathcal{L}} + \frac{1}{2\mathcal{L}}\sqrt{\mathcal{R}^2 - \frac{4\mathcal{L}}{\mathcal{C}}} \quad p_2 = -\frac{\mathcal{R}}{2\mathcal{L}} - \frac{1}{2\mathcal{L}}\sqrt{\mathcal{R}^2 - \frac{4\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}.$$

Dann ist

$$I(p) = \frac{U(p)}{\mathcal{L}} \frac{p}{(p-p_1)(p-p_2)}.$$

Man prüft leicht nach, dass sich der letzte Faktor wie folgt umformen lässt:

$$\frac{p}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{p_1}{(p_1-p_2)} \frac{1}{(p-p_1)} - \frac{p_2}{(p_1-p_2)} \frac{1}{(p-p_2)}.$$

Dann ergibt sich im Bildbereich die Lösung:

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{U(p)}{\mathcal{L}} \left[ \frac{p_1}{(p_1-p_2)} \frac{1}{(p-p_1)} - \frac{p_2}{(p_1-p_2)} \frac{1}{(p-p_2)} \right] \\ &= \frac{U(p)}{\mathcal{L}(p_1-p_2)} \left[ \frac{p_1}{p-p_1} - \frac{p_2}{p-p_2} \right], \end{aligned}$$

$$\text{mit } p_{1/2} = -\frac{\mathcal{R}}{2\mathcal{L}} \pm \frac{1}{2\mathcal{L}}\sqrt{\mathcal{R}^2 - \frac{4\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}, \text{ also } I(p) = \frac{U(p)}{\sqrt{\mathcal{R}^2 - \frac{4\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}} \left[ \frac{p_1}{p-p_1} - \frac{p_2}{p-p_2} \right].$$

Die Rücktransformation erfolgt mittels des **Faltungssatzes**. Es ist

$$L[U(t)] = U(p), \quad L[p_i e^{p_i t}] = \frac{p_i}{p-p_i} \quad (i=1,2) \quad L[I(t)] = I(p) \text{ und}$$

$$U(p) \left[ \frac{p_1}{p-p_1} - \frac{p_2}{p-p_2} \right] = L[U(t) * (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})].$$

Somit erhält man

$$I(t) = \frac{U(t) * [p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}]}{\sqrt{\mathcal{R}^2 - \frac{4\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}^2 - \frac{4\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}} \int_0^t U(t)[p_1 e^{p_1(t-\tau)} - p_2 e^{p_2(t-\tau)}] d\tau$$

als Lösung im Originalbereich.