HSD Dr. S. Handrock
Fakultät für Mathematik
TU Chemnitz

Arbeitsblatt 2 zur Vorlesung Mathematik III für Wirtschaftsingenieure

Die Schwingungsgleichung

Mechanische und elektrische Schwingungen werden im einfachsten Fall durch eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Bezeichnet t die Zeit, so schreibt man

$$a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0\,x = g(t).$$

Dabei bedeuten $a_2\ddot{x}$ die Trägheitskraft, $a_1\dot{x}$ die Reibungskraft, $a_0\,x$ die Rückstellkraft und $g(t)$ eine äußere Kraft.

Ist $g(t) = 0$ für alle $t \geq 0$, so ist die Differentialgleichung **homogen** und man spricht von einer **Eigenschwingung**.

Ist $g(t) \neq 0$ für wenigstens ein $t \geq 0$, so ist die Differentialgleichung **inhomogen** und man spricht von einer **erzwungenen Schwingung**.

Ist $a_1 = 0$, d.h. der Prozess verläuft **ohne Reibung** oder **ohne Dämpfung**, so spricht man von einer **ungedämpften Schwingung**.

Ist $a_1 > 0$, d.h. der Prozess verläuft **mit Reibung** oder **mit Dämpfung**, so spricht man von einer **gedämpften Schwingung**.

Beispiel 0.1 *Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich* **reibungsfrei** *längs der x-Achse unter Einwirkumg einer Federkraft $-k\,x$, $(k > 0)$. Man erhält nach dem Newtonschen Gesetz für das Bewegungsgesetz $x(t)$ des Massenpunktes:*

$$m\ddot{x} = -k\,x \quad \Longleftrightarrow \quad m\ddot{x} + k\,x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Setzt man $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, so erhält man mit

$$\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

die Differentialgleichung einer **ungedämpften Eigenschwingung**.

Zusätzlich zur Federkraft wirke auf m noch eine **Reibungskraft** *der Form $-r\dot{x}$, $(r > 0)$. Dann erhält man*

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - k\,x \quad \Longleftrightarrow \quad m\ddot{x} + r\dot{x} + k\,x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Setzt man $2\delta = \dfrac{r}{m}$, so erhält man mit

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

die Differentialgleichung einer **gedämpften Eigenschwingung**. *In beiden Fällen ordnen wir der Differentialgleichung für $t_0 = 0$ die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ zu. Dies bedeutet, die Masse wird in der Ruhelage kurz angestoßen.*

Beispiel 0.2 *Eine Spule der Induktivität L und ein Kondensator der Kapazität C seien in Reihe geschalten. Dann gilt nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz für die Stromstärke I(t):*

$$L\dot{I} + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad \Longrightarrow \quad L\ddot{I} + \frac{1}{C}I = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{I} + \frac{1}{LC}I = 0.$$

Setzt man $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$, *so erhält man mit*

$$\ddot{I} + \omega_0^2 I = 0$$

die Differentialgleichung einer **ungedämpften Eigenschwingung**.

Zusätzlich sei noch ein Ohmscher Widerstand R in Reihe geschalten. Man erhält

$$L\dot{I} + RI + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad \Longrightarrow \quad L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = 0.$$

Setzt man $2\delta = \dfrac{R}{L}$, *so erhält man mit*

$$\ddot{I} + 2\delta\dot{I} + \omega_0^2 I = 0$$

die Differentialgleichung einer **gedämpften Eigenschwingung**. *In beiden Fällen ordnen wir der Differentialgleichung für* $t_0 = 0$ *die Anfangsbedingungen* $I(0) = 0$ *und* $\dot{I}(0) = \dot{I}_0$ *zu.*

1. Ungedämpfte Eigenschwingungen

Wir lösen das Anfangswertproblem $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,\;\; x(0) = 0,\;\; \dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

Die **charakteristische Gleichung** lautet $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$. Sie besitzt die Lösungen $\lambda_{1/2} = \pm\omega_0\, i$. Somit haben die **allgemeine Lösung** und ihre 1. Ableitung die Form

$x(t) = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$

$\dot{x}(t) = -C_1\omega_0 \sin\omega_0 t + \omega_0 C_2 \cos\omega_0 t$

Einsetzen von $x(t)$ und $\dot{x}(t$ in die Anfangsbedingungen liefert ein lineares Gleichungssystem

$x(0) = C_1 \cdot 1 = 0$

$\dot{x}(0) = C_2 \cdot \omega_0 \cdot 1 = \dot{x}_0$

aus dem man $C_1 = 0$ und $C_2 = \dfrac{\dot{x}_0}{\omega_0}$ erhält.

Somit ist $x(t) = \dfrac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$ die Lösung des Anfangswertproblems.

2. Gedämpfte Eigenschwingungen

Wir lösen das Anfangswertproblem $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,\;\; x(0) = 0,\;\; \dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

Die **charakteristische Gleichung** lautet $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$. Sie besitzt die Lösungen $\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$. Es sind drei Fälle zu unterscheiden.

1° Der **Kriechfall** (große Dämpfung) tritt ein, falls $\delta > \omega_0$ gilt. Wir setzen $\Omega = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$. Offensichtlich gilt $\Omega < \delta$. Für $\delta > \omega_0$ gibt es zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen der **charakteristischen Gleichung**: $\lambda_1 = -\delta + \Omega < 0$ und $\lambda_2 = -\delta - \Omega < 0$, wobei $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\Omega$ gilt. Somit haben die **allgemeine Lösung** und ihre 1. Ableitung die Form

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

$$\dot{x}(t) = \lambda_1 C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

Einsetzen von $x(t)$ und $\dot{x}(t$ in die Anfangsbedingungen liefert ein lineares Gleichungssystem

$$x(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 = 0$$

$$\dot{x}(0) = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = \dot{x}_0,$$

aus dem man $C_1 = \dfrac{\dot{x}_0}{2\Omega}$ und $C_2 = -\dfrac{\dot{x}_0}{2\Omega}$ erhält.

Somit ist $x(t) = \dfrac{\dot{x}_0}{2\Omega}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{\lambda_2 t})$ die Lösung des Anfangswertproblems.

2° Der **aperiodische Grenzfall** (mittlere Dämpfung) tritt ein, falls $\delta = \omega_0$ gilt. Für $\delta = \omega_0$ gibt es eine reelle Lösung der Vielfachheit 2 der **charakteristischen Gleichung**: $\lambda_1 = -\delta < 0$. Somit haben die **allgemeine Lösung** und ihre 1. Ableitung die Form

$$x(t) = (C_1 + C_2\, t)\, \mathrm{e}^{-\delta t}$$

$$\dot{x}(t) = C_2\, \mathrm{e}^{-\delta t} - \delta(C_1 + C_2\, t)\, \mathrm{e}^{-\delta t}.$$

Einsetzen von $x(t)$ und $\dot{x}(t$ in die Anfangsbedingungen liefert ein lineares Gleichungssystem

$$x(0) = C_1 \cdot 1 = 0$$

$$\dot{x}(0) = C_2 \cdot 1 - \delta C_1 \cdot 1 = \dot{x}_0,$$

aus dem man $C_1 = 0$ und $C_2 = \dot{x}_0$ erhält.

Somit ist $x(t) = \dot{x}_0 t \mathrm{e}^{-\delta t}$ die Lösung des Anfangswertproblems.

3° Der **Schwingfall** (kleine Dämpfung) tritt ein, falls $\delta < \omega_0$ gilt. Wir setzen $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Für $\delta < \omega_0$ gibt es ein Paar zueinander konjugiert komplexer Lösungen der **charakteristischen Gleichung**: $\lambda_1 = -\delta + \omega\,\mathrm{i}$ und $\lambda_2 = -\delta - \omega\,\mathrm{i}$. Somit haben die **allgemeine Lösung** und ihre 1. Ableitung die Form

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$$

$$\dot{x}(t) = -\delta \mathrm{e}^{-\delta t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) + \mathrm{e}^{-\delta t}(-\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t).$$

Einsetzen von $x(t)$ und $\dot{x}(t$ in die Anfangsbedingungen liefert ein lineares Gleichungssystem

$$x(0) = C_1 \cdot 1 = 0$$

$$\dot{x}(0) = -\delta C_1 \cdot 1 + C_2 \omega \cdot 1 = \dot{x}_0,$$

aus dem man $C_1 = 0$ und $C_2 = \dfrac{\dot{x}_0}{\omega}$ erhält.

Somit ist $x(t) = \dfrac{\dot{x}_0}{\omega} \mathrm{e}^{-\delta t} \sin \omega t$ die Lösung des Anfangswertproblems.