HSD Dr. S. Handrock
Fakultät für Mathematik
TU Chemnitz

Arbeitsblatt 1 zur Vorlesung Mathematik III für Wirtschaftsingenieure

Geometrische und physikalische Anwendungen der Integralrechnung

Voraussetzungen: Die Integranden seien jeweils **stetige** Funktionen ihrer Argumente, B sei ein aus endlich vielen **Normalbereichen** zusammengesetzter ebener bzw. räumlicher Bereich, C sei eine **glatte** Kurve in der Ebene mit der expliziten Darstellung $y = \varphi(x)$ und S sei eine **glatte zweiseitige** Fläche mit der expliziten Darstellung $z = \varphi(x, y)$.

1. Ebene Bereichsintegrale

- Sei $f(x, y) = 1 \;\forall\; (x, y) \in B$. Dann erhält man mit $\iint\limits_B \mathrm{d}b$ den Flächeninhalt von B.
- Sei $f(x, y) \geq 0 \;\forall\; (x, y) \in B$. Dann erhält man mit $\iint\limits_B f(x, y)\,\mathrm{d}b$ das Volumen des Körpers, begrenzt von oben durch die Fläche $z = f(x, y)$, von den Seiten durch zylindrische Flächen mit Erzeugenden parallel zur z-Achse und von unten durch den ebenen Bereich B in der xy-Ebene.
- Sei $\rho(x, y)$ die Dichtefunktion einer kontinuierlich auf dem Bereich B verteilten Masse. Dann erhält man mit

$$
\begin{aligned}
m &= \iint\limits_B \rho(x, y)\,\mathrm{d}b \quad \text{die Gesamtmasse von } B,\\
M_y &= \iint\limits_B x\rho(x, y)\,\mathrm{d}b \quad \text{das statische Moment bezüglich der } y\text{-Achse},\\
M_x &= \iint\limits_B y\rho(x, y)\,\mathrm{d}b \quad \text{das statische Moment bezüglich der } x\text{-Achse},\\
I_y &= \iint\limits_B x^2\rho(x, y)\,\mathrm{d}b \quad \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } y\text{-Achse},\\
I_x &= \iint\limits_B y^2\rho(x, y)\,\mathrm{d}b \quad \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } x\text{-Achse},\\
x_0 &= \frac{M_y}{m},\ y_0 = \frac{M_x}{m} \quad \text{die Schwerpunktskoordinaten von } B.
\end{aligned}
$$

2. Räumliche Bereichsintegrale

- Sei $f(x, y, z) = 1 \;\forall\; (x, y, z) \in B$. Dann erhält man mit $\iiint\limits_B \mathrm{d}b$ das Volumen von B.
- Sei $\rho(x, y, z)$ die Dichtefunktion einer kontinuierlich auf dem Bereich B verteilten Masse. Dann erhält man mit

$$
m = \iint\limits_B \int \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}b \quad \text{die Gesamtmasse von } B,
$$

$$
\begin{aligned}
M_{yz} &= \iiint\limits_B x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}b \quad \text{das statische Moment bezüglich der } yz\text{-Ebene,}\\
M_{zx} &= \iiint\limits_B y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}b \quad \text{das statische Moment bezüglich der } zx\text{-Ebene,}\\
M_{xy} &= \iiint\limits_B z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}b \quad \text{das statische Moment bezüglich der } xy\text{-Ebene,}\\
I_{yz} &= \iiint\limits_B x^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}b \quad \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } yz\text{-Ebene,}\\
I_{zx} &= \iiint\limits_B y^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}b \quad \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } zx\text{-Ebene,}\\
I_{xy} &= \iiint\limits_B z^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}b \quad \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } xy\text{-Ebene,}\\
x_0 &= \frac{M_{yz}}{m},\ y_0 = \frac{M_{zx}}{m},\ z_0 = \frac{M_{xy}}{m} \quad \text{die Schwerpunktskoordinaten von } B.
\end{aligned}
$$

3. Kurvenintegrale 1. Art

- Sei $f(x,y) = 1\ \forall\ (x,y) \in C$. Dann erhält man mit $\int\limits_C \mathrm{d}l$ die Länge von C.
- Sei $\rho(x,y)$ die Dichtefunktion einer kontinuierlich auf der Kurve C verteilten Masse. Dann erhält man mit

$$
\begin{aligned}
m &= \int\limits_C \rho(x,y)\,\mathrm{d}l \quad \text{die Gesamtmasse von } C,\\
M_y &= \int\limits_C x\rho(x,y)\,\mathrm{d}l \quad \text{das statische Moment bezüglich der } y\text{-Achse,}\\
M_x &= \int\limits_C y\rho(x,y)\,\mathrm{d}l \quad \text{das statische Moment bezüglich der } x\text{-Achse,}\\
I_y &= \int\limits_C x^2\rho(x,y)\,\mathrm{d}l \quad \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } y\text{-Achse,}\\
I_x &= \int\limits_C y^2\rho(x,y)\,\mathrm{d}l \quad \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } x\text{-Achse,}\\
x_0 &= \frac{M_y}{m},\ y_0 = \frac{M_x}{m} \quad \text{die Schwerpunktskoordinaten von } C.
\end{aligned}
$$

4. Kurvenintegrale 2. Art

- Der Flächeninhalt P des von einer **geschlossenen** Kurve C begrenzten ebenen Bereiches lässt sich auf verschiedene Weise als **Kurvenintegral 2. Art** berechnen:

$$
P = \int\limits_C x\,\mathrm{d}y = -\int\limits_C y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.
$$

Dabei wird C gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen, derart, dass der Bereich zur Linken liegt.

- Der Begriff der Arbeit, die in der Vektoralgebra durch das **Skalarprodukt** zweier konstanter Vektoren darstellbar ist, wird durch das **Kurvenintegral 2. Art** auf den Fall von Vektorfunktionen verallgemeinert.

  Sei $\mathbf{v}(x,y) = v_x(x,y)\mathbf{i} + v_y(x,y)\mathbf{j}$ ein Kraftfeld, welches sich in den Punkten einer Kurve C nach Größe und Richtung ändert. Ferner sei $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j}$ ein Längenelement der Kurve C. Dann wird bei der Bewegung eines Massenpunktes der Masse 1 unter dem Einfluss dieser Kraft die Arbeit

  $$W = \int\limits_C v_x(x,y)\,\mathrm{d}x + v_y(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_C \langle \mathbf{v}, \mathrm{d}\mathbf{r} \rangle$$

  verrichtet.

  Das **Kurvenintegral 2.Art** hängt bei festem Anfangs- und Endpunkt i. Allg. noch von der Kurve C ab, die beide Punkte verbindet (Wegabhängigkeit des **Kurvenintegrals 2. Art**). Die Arbeit hängt genau dann nicht von dem zwei Punkte verbindenden Weg C ab, (Wegunabhängigkeit des **Kurvenintegrals 2. Art**) wenn

  $$\mathbf{v} = \nabla U$$

  ist (d.h., der Integrand ist das **totale Differential** eines **SF**, des sogenannten **Potenzials** $U(x,y)$ des Kraftfeldes $\mathbf{v}$). In diesem Falle berechnet sich die Arbeit als Differenz der **Potenziale** in diesen beiden Punkten.

5. Oberflächenintegrale 1. Art

- Sei $f(x,y,z) = 1 \;\forall\; (x,y,z) \in S$. Dann erhält man mit $\iint\limits_S \mathrm{d}S$ den Flächeninhalt von S.

- Sei $\rho(x,y,z)$ die Dichtefunktion einer kontinuierlich auf der Fläche S verteilten Masse. Dann erhält man mit

$$\begin{aligned}
m &= \iint\limits_S \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S && \text{die Gesamtmasse von } S,\\
M_{yz} &= \iint\limits_S x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S && \text{das statische Moment bezüglich der } yz\text{-Ebene},\\
M_{zx} &= \iint\limits_S y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S && \text{das statische Moment bezüglich der } zx\text{-Ebene},\\
M_{xy} &= \iint\limits_S z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S && \text{das statische Moment bezüglich der } xy\text{-Ebene},\\
I_{yz} &= \iint\limits_S x^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S && \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } yz\text{-Ebene},\\
I_{zx} &= \iint\limits_S y^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S && \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } zx\text{-Ebene},\\
I_{xy} &= \iint\limits_S z^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S && \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } xy\text{-Ebene},\\
x_0 &= \frac{M_{yz}}{m},\; y_0 = \frac{M_{zx}}{m},\; z_0 = \frac{M_{xy}}{m} && \text{die Schwerpunktskoordinaten von } S.
\end{aligned}$$

6. Oberflächenintegrale 2. Art

- Das Volumen V des von einer **geschlossenen** Fläche S begrenzten räumlichen Bereiches lässt sich auf verschiedene Weise als **Oberflächenintegral 2. Art** berechnen:

$$V = \iint_{S_+} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iint_{S_+} y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x = \iint_{S_+} z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{3} \iint_{S_+} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

  Dabei bezeichnet S_+ die Außenseite der Berandungsfläche S.

- Der Begriff des Vektorflusses durch eine Fläche, der in der Vektoralgebra durch das **Spatprodukt** dreier konstanter Vektoren darstellbar ist, wird durch das **Oberflächenintegral 2. Art** auf den Fall von Vektorfunktionen verallgemeinert.

  Sei $\mathbf{v}(x, y, z) = v_x(x, y, z)\mathbf{i} + v_y(x, y, z)\mathbf{j} + v_z(x, y, z)\mathbf{k}$ die **Stromdichte** einer stationären (d.h. zeitunabhängigen), inkompressiblen (d.h. von konstanter Dichte ρ) Flüssigkeitsströmung, welche sich in den Punkten einer Fläche S nach Größe und Richtung ändert. Für die Stromdichte gilt: $\mathbf{v} = \rho\mathbf{u}$, wobei $\mathbf{u}$ die Strömungsgeschwindigkeit bezeichnet. Ferner sei $\mathrm{d}\mathbf{w} = \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, \mathbf{i} + \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \, \mathbf{j} + \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathbf{k}$ ein Oberflächenelement der Fläche S. Dann liefert

$$F = \iint_{S} v_x(x, y, z) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + v_y(x, y, z) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + v_z(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_{S} \langle \mathbf{v}, \mathrm{d}\mathbf{w} \rangle$$

  den Gesamtvektorfluss durch die Fläche S.

  Das **Oberflächenintegral**

$$\iint_{S} v_x(x, y, z) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + v_y(x, y, z) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + v_z(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

  besitzt für verschiedene nichtgeschlossene Flächen mit der gleichen Randkurve C i. Allg. verschiedene Werte, bzw. es verschwindet i. Allg. nicht über eine geschlossene Fläche (in Analogie zur Wegabhängigkeit des **Kurvenintegrals 2. Art**).

  Die **Vektorfunktion v** sei jetzt zusätzlich **stetig differenzierbar** in einem **einfach zusammenhängenden räumlichen Bereich** B (d.h. in einem Bereich, der mit jeder geschlossenen Fläche auch den von dieser Fläche begrenzten Bereich enthält). Dann verschwindet der Vektorfluss durch eine beliebige geschlossene Fläche S in B genau dann, wenn

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

  gilt. In diesem Falle strömt weder Flüssigkeit von außen in den Körper hinein, noch strömt Flüssigkeit von innen aus dem Körper heraus.

- Sei **J** das **VF** der **elektrischen Stromdichte**. Dann erhält man mit

$$I = \iint_{S} \langle \mathbf{J}, \mathrm{d}\mathbf{w} \rangle \quad \text{die elektrische Stromstärke.}$$

- Sei **B** das **VF** der **magnetischen Induktion**. Dann erhält man mit

$$\Phi = \iint_{S} \langle \mathbf{B}, \mathrm{d}\mathbf{w} \rangle \quad \text{den magnetischen Fluss.}$$