Vorlesungsskript Mathematik I für Wirtschaftsingenieure

Verfasserin:
HSD Dr. Sybille Handrock
TU Chemnitz
Fakultät für Mathematik
e-mail: handrock@mathematik.tu-chemnitz.de

Wintersemester 2005/06

Literatur

[1] *Dallmann, H., Elster, K. H.*: Einführung in die höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Bd. 1–2, Uni–TB GmbH, Stuttgart, 1991.

[2] *Dietmaier, C.*: Mathematik für Wirtschaftsingenieure, Fachbuchverlag, Leipzig, 2005.

[3] *Henze, N., Last, G.*: Mathematik für Wirtschaftsingenieure 1, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2005.

[4] *Luderer, B., Würker, U.*: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik, B.G. Teubner, Stuttgart, 2004.

[5] *Nollau, V.*: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, B.G. Teubner, Stuttgart, 2003.

[6] *Pforr, E. A., Schirotzek, W.*: Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen, Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1993.

[7] *Rommelfanger, H.*: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Bd. 1–2, B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim/Leipzig, Wien, Zürich, 2004/2002.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Elemente der mathematischen Logik

1.1.1 Aussagen und ihre Verknüpfung

In der Umgangssprache sind Aussagesätze nicht immer eindeutig interpretierbar, z.B. „Das Wetter ist schön“. In der mathematischen Logik verstehen wir dagegen unter einer **Aussage** einen sinnvollen Satz, der seiner inhaltlichen Bedeutung nach **entweder wahr oder falsch** ist. (**Prinzip der Zweiwertigkeit**)

Sätze, die weder wahr noch falsch sind und solche, die sowohl wahr als auch falsch sind, gehören in unserem Sinne nicht zu den **Aussagen**.

Zur Formalisierung des Zweiwertigkeitsprinzips führen wir die **Wahrheitswerte** W für „wahr“ und F für „falsch“ ein. Statt „Eine Aussage ist wahr“ können wir jetzt sagen „Einer Aussage wird der Wahrheitswert W zugeordnet“, entsprechend bedeutet die Zuordnung des F–Wertes, dass die betreffende Aussage falsch ist. Die aus den Wahrheitswerten W und F bestehende Menge $\{W, F\}$ nennen wir Wahrheitswertemenge. Aussagen bezeichnen wir mit Kleinbuchstaben $p, q, r, \ldots$.

Beispiel 1.1 *Wir betrachten die folgenden Sätze:*

(1) Kaufen Sie soviel wie möglich!

Der Satz ist weder wahr noch falsch, also keine Aussage.

(2) In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel gleich $180°$*.*

Der Satz ist sowohl wahr als auch falsch. In der ebenen Trigonometrie ist er wahr, in der sphärischen Trigonometrie falsch.

(3) Der Umsatz ist gleich dem Produkt aus Absatz und Verkaufspreis. (W)

Unter Verknüpfungen von Aussagen verstehen wir **Operationen**, wie sie auch aus anderen Gebieten der Mathematik bekannt sind. Charakteristika für die Verknüpfungen von Aussagen sind:

- Es werden ausschließlich Aussagen miteinander verknüpft. Das Ergebnis einer solchen Verknüpfung ist wieder eine Aussage.
- Die Verknüpfungen sind so beschaffen, dass der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage einzig und allein von den Wahrheitswerten der verknüpften Aussagen abhängt (Darstellung durch Wahrheitswertetabellen).

Definition 1.1 (Operationen mit Aussagen)

1. *Die* **Operation** $\neg p$ *(nicht* p*) heißt* **Negation (Verneinung)** *von* p*. Die Aussage* $\neg p$ *ist genau dann wahr, wenn* p *falsch ist.*

p	$\neg p$
W	F
F	W

2. *Die* **Operation** $p \wedge q$ *(*p *und* q*) heißt* **Konjunktion** *von* p *und* q*. Die Aussage* $p \wedge q$ *ist genau dann wahr, wenn sowohl* p *als auch* q *wahr sind.*

p	q	$p \wedge q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

3. *Die* **Operation** $p \vee q$ *(*p *oder (auch)* q*) heißt* **Alternative** *von* p *und* q*. Die Aussage* $p \vee q$ *ist genau dann wahr, wenn* **mindestens** *eine der Aussagen* p *und* q *wahr ist.*

p	q	$p \vee q$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

4. *Die* **Operation** $p >< q$ *(entweder* p *oder* q*) heißt* **Disjunktion** *von* p *und* q*. Die Aussage* $p >< q$ *ist genau dann wahr, wenn* **genau** *eine der Aussagen* p *und* q *wahr ist.*

p	q	$p >< q$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

5. *Die* **Operation** $p \backslash q$ *(*p *unverträglich mit* q*) heißt* **Unverträglichkeit** *von* p *und* q*. Die Aussage* $p \backslash q$ *ist genau dann wahr, wenn* **höchstens** *eine der Aussagen* p *und* q *wahr ist.*

p	q	$p \backslash q$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	W

6. *Die* **Operation** $p \Longrightarrow q$ *(wenn* p *dann* q*) heißt* **Implikation** *von* p *und* q*. Die Aussage* $p \Longrightarrow q$ *ist genau dann falsch, wenn* p *wahr und* q *falsch ist.*

p	q	$p \Longrightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

7. *Die* **Operation** $p \Longleftrightarrow q$ *(p genau dann, wenn q) heißt* **Äquivalenz** *von p und q. Die Aussage $p \Longleftrightarrow q$ ist genau dann wahr, wenn p und q wahr oder p und q falsch sind.*

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Beispiel 1.2 *p (bzw. q): In einem Land A (bzw. B) hat ein Unternehmen U einen Marktanteil von über 30%. Dann ist*

(1) $\neg p$ *: In A hat U einen Marktanteil von höchstens 30%.*

(2) $p \wedge q$ *: In A und B hat U einen Marktanteil von über 30%.*

(3) $p \vee q$ *: In* **wenigstens** *einem der Länder A oder B hat U einen Marktanteil von über 30%.*

(4) $p >< q$ *: In* **genau** *einem der Länder A oder B hat U einen Marktanteil von über 30%.*

(5) $p \backslash q$ *: In* **höchstens** *einem der Länder A oder B hat U einen Marktanteil von über 30%.*

(6) $p \Longrightarrow q$ *: Wenn U in A einen Marktanteil von über 30% hat, dann auch in B.*

(7) $p \Longleftrightarrow q$ *: In A hat U genau dann einen Marktanteil von über 30%, wenn dies auch in B der Fall ist.*

Die **Implikation** ist nicht kommutativ (folgt aus der Wahrheitswertetabelle dieser **Operation**). Desweiteren kann aus einer falschen Voraussetzung eine wahre Aussage folgen, z. B. ist die **Implikation** $(+1 = -1) \Longrightarrow ((+1)^2 = (-1)^2)$ wahr, obwohl die Aussage $+1 = -1$ falsch ist. Eine „wenn – dann“ Formulierung ist also nicht in jedem Fall mit einer Beziehung zwischen Ursache und Wirkung in Zusammenhang zu bringen.

Die **Implikation** kann eine **notwendige** bzw. auch eine **hinreichende** Bedingung angeben: $p \Longrightarrow q$ kann bedeuten: q ist **notwendig** für p (**nur** wenn q, so p) bzw. p ist **hinreichend** für q, während die **Äquivalenz** eine **notwendige und hinreichende** Bedingung widerspiegelt. Wir betrachten z.B. folgende Aussagen: p: es regnet und q: die Straße ist nass. Dann ist p ist **hinreichend** für q, jedoch ist q nicht **notwendig** für p.

1.1.2 Aussagenlogische Gesetze

Mit Hilfe der **Operationen** können aus vorgegebenen Aussagen $p, q, r, \ldots$ weitere zusammengesetzte Aussagen (aussagenlogische Gesetze) gebildet werden. Dabei wird die Eindeutigkeit dieser neuen Aussagen durch

a) die Rangfolge

- zuerst Negation,
- dann Konjunktion, Alternative, Disjunktion und Unverträglichkeit,
- dann Implikation und Äquivalenz

b) das Setzen von Klammern, die von innen nach außen interpretiert werden

gesichert. Der **Wahrheitswert** eines aussagenlogischen Gesetzes lässt sich mit Hilfe einer Wahrheitswertetabelle bestimmen.

Definition 1.2 (Tautologien, Kontradiktionen)

1. *Eine Aussage, die stets wahr ist, heißt* **Tautologie**, *z.B.* $p \vee \neg p$ *(Satz vom ausgeschlossenen Dritten).*

2. *Eine Aussage, die stets falsch ist, heißt* **Kontradiktion**, *z.B.* $p \wedge \neg p$ *(Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch).*

Theorem 1.1 *Es gelten folgende Behauptungen:*

1. *Satz von der* **Negation der Negation**: $\neg(\neg p) \Longleftrightarrow p$.

2. *Satz von der* **Transitivität der Implikation**: $[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$.

3. *Satz von der* **Kontraposition**: $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg p)$.

4. **De Morganschen Regeln**

   (1) $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$,

   (2) $\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.

Beweis für die **de Morgansche Regeln:**

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
W	W	W	W	F	F	F	F	F	F
W	F	F	W	F	W	W	W	F	F
F	W	F	W	W	F	W	W	F	F
F	F	F	F	W	W	W	W	W	W

□

Beispiel 1.3 *Nach einer Havarie, als deren Verursacher drei Aggregate A, B, C möglich sind, kamen die Gutachter zu folgenden Aussagen:*

1. *Mindestens eines der Aggreate verursachte die Havarie.*

2. *Falls nicht A und B die Havarie verursachten, dann war C nicht der Verursacher.*

3. *Ist A ein Verursacher oder C nicht, dann ist B kein Verursacher.*

Aus diesen Angaben folgt, dass das Aggregat A der alleinige Verursacher der Havarie ist.

1.2 Mengenlehre

1.2.1 Der Mengenbegriff

Cantorsche Erklärung einer Menge: *„Eine Menge ist eine wohldefinierte Zusammenfassung bestimmter unterscheidbarer Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die Elemente der Menge genannt werden – zu einem Ganzen.“* (In: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (1895)).

Wichtig sind dabei die Begriffe „wohldefiniert“ und „unterscheidbar“. Zum einen müssen sich die Elemente einer Menge **eindeutig** beschreiben lassen, d.h., für jedes Objekt x und jede Menge A muss stets entscheidbar sein, ob x als Element zu A gehört oder nicht. Zum anderen muss sich jedes Element von den anderen Elementen durch wenigstens ein Merkmal unterscheiden.

Mengen bezeichnen wir mit Großbuchstaben $A, B, C, \ldots$ und die Elemente mit Kleinbuchstaben $a, b, c, \ldots$.

Die Schreibweise $a \in A$ bedeutet a gehört zur Menge A, während $a \notin A$ den Sachverhalt a gehört nicht zur Menge A bezeichnet.

Definition 1.3 (leere, endliche, abzählbar unendliche, überabzählbar unendliche, disjunkte Mengen)

1. *Eine Menge A heißt* **leer***, wenn sie* **kein** *Element enthält. Eine Menge, die* **wenigstens ein** *Element enthält, heißt* **nichtleer***.*

   Bezeichnung der leeren Menge: $\emptyset$ Es gilt: $x \notin \emptyset \ \forall x$. (*$\forall$ bedeutet* **für alle**)

2. *Eine Menge heißt* **endlich***, wenn sie* **endlich viele Elemente** *oder überhaupt* **kein Element** *enthält. In allen anderen Fällen heißt die Menge* **unendlich***.*

3. *Eine* **unendliche** *Menge heißt* **abzählbar unendlich***, wenn sich ihre Elemente als unendliche Folge durchnummerieren lassen. Jede* **nichtabzählbar unendliche** *Menge heißt* **überabzählbar unendlich***.*

4. *Besitzen die Mengen B und C keine gemeinsamen Elemente, so heißen sie* **elementefremd** *oder* **disjunkt***.*

Beispiel 1.4 (leere, endliche, abzählbar unendliche, überabzählbar unendliche, disjunkte Mengen)

(1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4 = 0\} = \emptyset$.

Aber: Die Mengen $\emptyset$ und $B = \{0\}$ sind wohl zu unterscheiden.

(2) $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *ist* **abzählbar unendlich***.*

(3) $I = [0, 1]$ *ist* **überabzählbar unendlich***.*

(4) $A = \{1, 2, 3\}$ *und* $B = \{4, 5, 6\}$ *sind* **disjunkt***.*

Zur Veranschaulichung von Mengen und der zwischen Mengen bestehenden Beziehungen verwendet man oft Punktmengen in der Ebene, die durch geschlossene Kurven begrenzt werden **(Venn – Diagramme)**.

1.2.2 Relationen (Beziehungen) zwischen Mengen

Man erhält Aussagen über die Vergleichbarkeit von Mengen.

Definition 1.4 (Mengeninklusion, Mengengleichheit, Unvergleichbarkeit)

1. *Eine Menge A heißt* **Teilmenge** *einer Menge B, genau dann, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.*

   Bezeichnung: $A \subseteq B$ oder $B \supseteq A$.

   $A \subseteq B \iff (x \in A \Longrightarrow x \in B)$ *für alle* $x \in A$.

2. *A heißt* **echte Teilmenge** *von B, gdw $A \subseteq B \wedge A \neq B$, d.h.*

   - *A ist Teilmenge von B und*
   - *B enthält mindestens ein Element, das nicht in A enthalten ist.*

   Bezeichnung: $A \subset B$

   Falls $A \subset B$ ist, so sagt man auch:

   (1) A **ist echt enthalten in** B, *bzw.*

   (2) B **ist echte Obermenge von** A.

3. *Zwei Mengen A und B heißen* **gleich** *gdw sie dieselben Elemente besitzen.*

   Bezeichnung: $A = B$

   $A = B \iff (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

4. *Zwei Mengen A und B heißen* **unvergleichbar***, wenn es sowohl Elemente von A gibt, die nicht in B liegen, als auch Elemente von B, die nicht in A enthalten sind. Es gilt also keine der Relationen $A \subseteq B, A = B$ oder $B \subseteq A$, sondern $A \nsubseteq B$ und $B \nsubseteq A$.*

Beispiel 1.5 (Mengeninklusion, Mengengleichheit, Unvergleichbarkeit)

(1) *A: Menge aller Quadrate in der Ebene,*

B: Menge aller Rechtecke in der Ebene.

Dann ist $A \subseteq B$.

(2) *A: Menge aller Quadrate in der Ebene,*

B: Menge aller Rechtecke in der Ebene, deren Diagonalen sich unter einem rechten Winkel schneiden.

Dann ist $A = B$.

(3) $A = \{1, 2, 4\}$ $\quad$ $B = \{1, 2, 3, 5, 8, 12\}$ $\quad$ *Es gilt: $A \nsubseteq B$ und $B \nsubseteq A$.*

Die **Mengeninklusion** kann man im Sinne der Aussagenlogik als **Implikation** der Aussagen $x \in A$ und $x \in B$ auffassen. Analoges gilt für die **Mengengleichheit** und **Äquivalenz**.

1.2.3 Operationen (Verknüpfungen) von Mengen

Durch Verknüpfungen wird eine neue Menge gebildet.

Definition 1.5 (Komplementärmenge, Vereinigung, Durchschnitt, Differenzmenge)

1. **Komplementärmenge (Komplement) von B bezüglich einer Obermenge** Ω, *die die Grundgesamtheit aller betrachteten Elemente darstellt* (Ω *heißt auch* **Universalmenge**), *heißt die Menge aller Elemente von* Ω, *die* **nicht** *zu* B *gehören* (*Analogon zur* **Negation**).

   Bezeichnung: $\overline{B} := \{x \mid x \in \Omega \wedge x \notin B\}$

2. **Vereinigung** *der Mengen* A *und* B *heißt die Menge der Elemente, die zu* A **oder** *zu* B (*die zu* **mindestens einer** *der beiden Mengen*) *gehören* (*Analogon zur* **Alternative**).

   Bezeichnung: $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

3. **Durchschnitt** *der Mengen* A *und* B *heißt die Menge der Elemente, die zu* A **und** *zu* B (*die* **sowohl** *zu* A **als auch** *zu* B) *gehören* (*Analogon zur* **Konjunktion**).

   Bezeichnung: $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

4. **Differenzmenge** *der Mengen* A *und* B *heißt die Menge aller Elemente, die zu* A, **aber nicht** *zu* B *gehören* (**Komplement** *von* B *bez.* A, *falls* $B \subseteq A$).

   Bezeichnung: $A \backslash B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Beispiel 1.6 (Komplementärmenge, Vereinigung, Durchschnitt, Differenzmenge)

(1) $\Omega = \{x \mid -3 \leq x \leq 8\} \quad A = \{x \mid -3 \leq x \leq 1\} \quad B = \{x \mid -3 \leq x \leq 2\}$.
Es ist $A \subset B \subset \Omega$ *und* $\overline{A} = \{x \mid 1 < x \leq 8\} \quad \overline{B} = \{x \mid 2 < x \leq 8\}$ *und somit* $\overline{B} \subset \overline{A}$.

(2) $A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{3, 2, 1, 0\} \quad A \cup B = \{0, 1, 2, 3\} \quad A \cap B = \{1, 2, 3\}$

(3) $A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{3, 4, 5\} \quad A \backslash B = \{1, 2\}$

1.2.4 Eigenschaften von Mengenrelationen und Mengenoperationen

Theorem 1.2 *Es gelten folgende Behauptungen:*

1. $A = A$

   $A \subseteq A$

2. $(A = B \bigwedge B = C) \Longrightarrow (A = C)$

   $(A \subseteq B \bigwedge B \subseteq C) \Longrightarrow (A \subseteq C)$

3. $(A = B) \Longrightarrow (B = A)$
   Aber: Wenn $A \subseteq B$, dann gilt i. Allg. nicht $B \subseteq A$.

4. $\emptyset \subseteq A \;\; \forall A$

5. $(A \subseteq B) \Longleftrightarrow (\overline{B} \subseteq \overline{A})$

6. $\overline{\overline{A}} = A \quad \forall A$

7. $\overline{\Omega} = \emptyset \qquad \overline{\emptyset} = \Omega$

8. $A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$

9. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

10. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

11. $A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$
    $A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$
    $A \cup A = A \qquad A \cap A = A$

12. $A \cup (A \cap B) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A$

13. $A \cup \overline{A} = \Omega \qquad A \cap \overline{A} = \emptyset$

14. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
    $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

15. $A \backslash A = \emptyset \qquad \emptyset \backslash A = \emptyset \qquad A \backslash \emptyset = A$

16. $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$
    $(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$

Beweis für die erste der Formeln 14.:

1. Methode: Analogon zur Wahrheitswertetabelle

$x \in A$	$x \in B$	$x \in \overline{A}$	$x \in \overline{B}$	$x \in A \cup B$	$x \in \overline{A \cup B}$	$x \in \overline{A} \cap \overline{B}$
W	W	F	F	W	F	F
W	F	F	W	W	F	F
F	W	W	F	W	F	F
F	F	W	W	F	W	W

2. Methode: Analogon zur Methode der äquivalenten Umformungen

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} \quad &\Longleftrightarrow \quad x \notin A \cup B \\ \Longleftrightarrow x \notin A \;\wedge\; x \notin B \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in \overline{A} \;\wedge\; x \in \overline{B} \Longleftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}. \end{aligned}$$

$\square$

1.3 Zahlbereiche

1.3.1 Aufbau der Zahlbereiche und Darstellung komplexer Zahlen

Wir betrachten Zahlenmengen, in welchen zwei Operationen, die **Addition** und die **Multiplikation**, eingeführt sind, und untersuchen Gleichungen auf ihre Lösbarkeit.

1. **Menge der natürlichen Zahlen** $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ bzw. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

   Es gilt: $a, b \in \mathbb{N} \Longrightarrow a + b \in \mathbb{N}$ und $a \cdot b \in \mathbb{N}$.

   Die Gleichung $x + 7 = 3$ ist in $\mathbb{N}$ nicht lösbar.

2. **Menge der ganzen Zahlen** $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1\} \cup \mathbb{N}_0$.

   Es gilt: $a, b \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a + b \in \mathbb{Z},\ a \cdot b \in \mathbb{Z}$ und $a - b \in \mathbb{Z}$.

   Die Gleichung $3x = 7$ ist in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar.

3. **Menge der rationalen Zahlen** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ \mathrm{ggT}(a, b) = 1 \right\}$. Jede **rationale** Zahl lässt sich als **endlicher** oder **unendlicher periodischer Dezimalbruch** darstellen.

   Es gilt: $a, b \in \mathbb{Q} \Longrightarrow a + b \in \mathbb{Q},\ a \cdot b \in \mathbb{Q},\ a - b \in \mathbb{Q}$ und $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}\ (b \neq 0)$.

   Die Gleichung $x^2 = 2$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

4. **Menge der reellen Zahlen (Menge aller Dezimalbrüche)** $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R}_{irr}$, wobei $\mathbb{R}_{irr}$ die Menge aller **irrationalen Zahlen (aller nichtperiodischen unendlichen Dezimalbrüche)** bezeichnet. Z.B. sind $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ **irrationale Zahlen**.

   Es gilt: $a, b \in \mathbb{R} \Longrightarrow a + b \in \mathbb{R},\ a \cdot b \in \mathbb{R},\ a - b \in \mathbb{R}$ und $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}\ (b \neq 0)$.

   (Absoluter) Betrag $|a|$ einer **reellen** Zahl a heißt der Abstand des diese Zahl darstellenden Punktes auf der Zahlengeraden vom Nullpunkt, d.h.

   $$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls} \quad a > 0 \\ 0, & \text{falls} \quad a = 0 \\ -a, & \text{falls} \quad a < 0. \end{cases}$$

   In $\mathbb{R}$ sind zwei verschiedene Zahlen stets vergleichbar, d.h, es gilt

   $$\begin{aligned} a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq b \quad &\Longrightarrow \quad (a < b) \vee (a > b), \\ a \leq b \quad &\Longleftrightarrow \quad a < b \vee a = b, \\ a \geq b \quad &\Longleftrightarrow \quad a > b \vee a = b. \end{aligned}$$

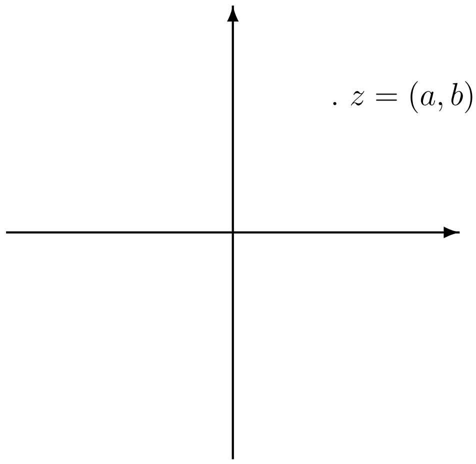
   Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar.

Für die betrachteten Zahlenmengen gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Die Zahlengerade ist durch Zahlen aus $\mathbb{R}$ lückenlos ausgefüllt, d.h., falls es eine Zahl gibt, die die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

erfüllt, so kann diese Zahl nicht auf der Zahlengeraden liegen. Wir führen eine neue Zahlenmenge ein, deren Elemente **geordete Paare reeller Zahlen** sind, nämlich die

5. **Menge der komplexen Zahlen** $\mathbb{C} = \{z \,|\, z = (a,b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$. Die Elemente der Menge $\mathbb{C}$ stellen Punkte in der **Gaußschen Zahlenebene** dar. Ein Koordinatensystem in der **Gaußschen Zahlenebene** ist durch eine reelle und eine imaginäre Achse gegeben.



Zwei wichtige Teilmengen sind

a) $\mathbb{C}_r = \{z \,|\, z = (a,0) \,|\, a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ - die Menge aller Punkte auf der reellen Achse,

b) $\mathbb{C}_i = \{z \,|\, z = (0,b) \,|\, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ - die Menge aller Punkte auf der imaginären Achse.

Wir betrachten zwei **komplexe Zahlen** $z_i = (a_i, b_i)$ $(i = 1, 2)$ und und führen den Begriff der **Gleichheit** sowie die Operationen **Addition** und **Multiplikation** ein:

Gleichheit: $z_1 = z_2 \Longleftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$,

Addition: $z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

Multiplikation: $z = z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1) \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Speziell gilt für Elemente der Menge $\mathbb{C}_r$:

$$\begin{aligned} (a_1,0) = (a_2,0) \quad &\Longleftrightarrow \quad a_1 = a_2, \\ (a_1,0) + (a_2,0) \quad &= \quad (a_1 + a_2, 0), \\ (a_1,0) \cdot (a_2,0) \quad &= \quad (a_1a_2, 0), \end{aligned}$$

d.h. **Gleichheit** und die Operationen **Addition** und **Multiplikation** entsprechen der **Gleichheit** und den Operationen **Addition** und **Multiplikation** in $\mathbb{R}$. Deshalb kann man $(a,0) = a$ und $\mathbb{C}_r = \mathbb{R}$ setzen. Die Zahl $(1,0) = 1$ nennt man **reelle Einheit**, während die Zahl $(0,1) =: \mathrm{i}$ **imaginäre Einheit** heißt. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} &= (0,1) \cdot (0,1) &= (-1,0) &= -1, \\ b \cdot \mathrm{i} &= (b,0) \cdot (0,1) &= (0,b), & \end{aligned}$$

d.h., es gilt $(0,b) = b\,\mathrm{i}$ (das geordnete Paar $(0,b)$ ist gleich dem Produkt der **reellen Zahl** b mit der **imaginären Einheit** i). Die Menge $\mathbb{C}_i$ besteht also aus allen **rein imaginären Zahlen**.

Es ist also

$$\begin{array}{rcll} a & = & (a,0) & \text{eine Darstellung einer } \textbf{reellen Zahl} \text{ als geordnetes Paar und} \\ b\,\mathrm{i} & = & (0,b) & \text{eine Darstellung einer } \textbf{rein imaginären Zahl} \text{ als geordnetes Paar.} \end{array}$$

Somit erhält man aus der Darstellung einer **komplexen** Zahl als geordnetes Paar die **kartesische** oder **algebraische Darstellung** einer **komplexen** Zahl:

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a + b\,\mathrm{i} = a + \mathrm{i}\,b.$$

Dabei heißt a der **Realteil** und b **Imaginärteil** von z.

Bezeichnungen: $a = \operatorname{Re} z \qquad b = \operatorname{Im} z$.

(Absoluter) Betrag $|z|$ einer **komplexen** Zahl z heißt der Abstand des diese Zahl darstellenden Punktes in der **Gaußschen Zahlenebene** vom Koordinatenursprung, d.h.

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} =: r.$$

Für $b = 0$ erhält man $r = |a|$, den **Betrag** einer **reellen Zahl**.

Bezeichnet man den Winkel, den die Strecke $\overline{Oz}$ mit der positiven Richtung der reellen Achse einschließt, mit $\varphi = \arg z$, so gilt

$$\begin{array}{rclrcl} a & = & r\cos\varphi, & b & = & r\sin\varphi, \\ r & = & \sqrt{a^2+b^2}, & \tan\varphi & = & \dfrac{b}{a}, \quad \text{falls} \quad a \neq 0, \\ \varphi & = & \dfrac{\pi}{2}, \quad \text{falls} \quad a = 0 \quad \text{und} \quad b > 0, & \varphi & = & \dfrac{3\pi}{2}, \quad \text{falls} \quad a = 0 \quad \text{und} \quad b < 0. \end{array}$$

Für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ ist durch die Vorzeichen dieser **reellen Zahlen** eindeutig festgelegt, in welchem Quadranten z liegt.

Man nennt (r, φ) auch die **Polarkoordinaten** eines Punktes z in der Ebene.

Folglich erhält man aus der **algebraischen Darstellung** einer **komplexen** Zahl mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ die **trigonometrische Darstellung** einer **komplexen** Zahl:

$$z = a + \mathrm{i}\,b = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi).$$

Für $a = b = 0$, d.h. $z = (0,0)$ ist $r = 0$ und $\arg z$ unbestimmt. Die Zahl $z = (0,0)$ ist die einzige **komplexe Zahl** mit unbestimmtem **Argument**. Für $z \neq (0,0)$ besitzt $\arg z$ unendlich viele Werte. Der Wert von $\arg z$, für den $0 \leq \arg z < 2\pi$ gilt, heißt **Hauptwert** von $\arg z$. Alle übrigen Werte gehen aus dem **Hauptwert** durch Addition von $2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ hervor.

Mit Hilfe der **Eulerschen Formeln** $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi \pm \mathrm{i}\,\sin\varphi$ erhält man aus der **trigonometrischen Darstellung** einer **komplexen** Zahl $z \neq (0,0)$ die **Exponentialdarstellung** einer **komplexen** Zahl:

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi) = r\,\exp(\mathrm{i}\varphi) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Wir unterscheiden also vier Darstellungsformen **komplexer** Zahlen:

(1) $z = (a,b)$ die **Darstellung** als **geordnetes Paar reeller** Zahlen a und b,

(2) $z = a + b\,\mathrm{i} = a + \mathrm{i}\,b$ die **algebraische Darstellung**,

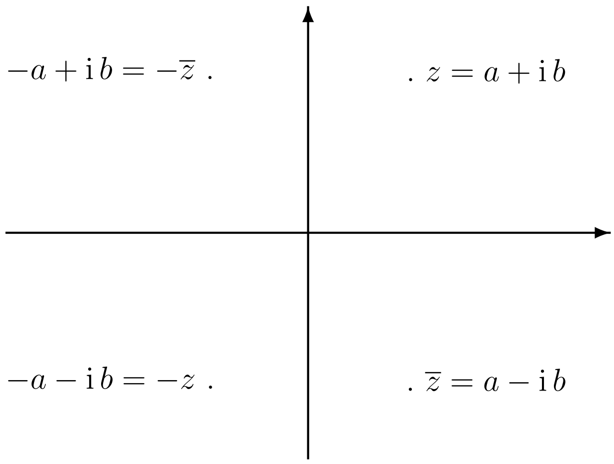
(3) $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi)$ die **trigonometrische Darstellung** für $z \neq (0,0)$,

(4) $z = r\,\exp(\mathrm{i}\varphi) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ die **Exponentialdarstellung** für $z \neq (0,0)$.

Beispiel 1.7 *Für die* **komplexe Zahl** $z = (1, \sqrt{3})$ *erhält man*
in der **algebraischen Form** $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ $\qquad \mathrm{Re}\,z = 1, \quad \mathrm{Im}\,z = \sqrt{3},$
in der **trigonometrischen Form** $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\qquad r = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{3},$
in der **Exponentialform** $z = 2\,\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}.$

Spezielle komplexe Zahlen: Sei $z = a + \mathrm{i}\,b$. Dann heißt

1. $\bar{z} = a - \mathrm{i}\,b$ **konjugiert komplexe** Zahl von z,
2. $-z = -a - \mathrm{i}\,b$ **entgegengesetzte** Zahl von z,
3. $-\bar{z} = \overline{-z} = -a + \mathrm{i}\,b$ **entgegengesetzte zur konjugiert komplexen** oder **konjugiert komplexe zur entgegengesetzten** Zahl von z.



Im Unterschied zu $\mathbb{R}$ sind in $\mathbb{C}$ zwei verschiedene **komplexe** Zahlen nicht vergleichbar. Ein Vergleich zweier **komplexer** Zahlen ist nur über die **Beträge** möglich.

1.3.2 Rechenoperationen in $\mathbb{C}$

Zur bequemen Ausführung von Rechenoperationen der 1. bis 3. Stufe wurden die Darstellungsmöglichkeiten (2) bis (4) eingeführt.

1. Rechenoperationen der 1. Stufe

   Addition und **Subtraktion** (Ausführung zweckmäßig in **algebraischer Darstellung** (2))

   Zwei komplexe Zahlen werden **addiert (subtrahiert)**, indem man die **Realteile** und die **Imaginärteile** jeweils für sich **addiert (subtrahiert)**:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + \mathrm{i}\,b_1) \pm (a_2 + \mathrm{i}\,b_2) = (a_1 \pm a_2) + \mathrm{i}\,(b_1 \pm b_2).$$

2. Rechenoperationen der 2. Stufe

Multiplikation (Ausführung in den Darstellungen (2) bis (4) möglich)

(2) Zwei komplexe Zahlen in **algebraischer Darstellung** werden multipliziert, indem man die Faktoren gliedweise ausmultipliziert:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + \mathrm{i}\, b_1) \cdot (a_2 + \mathrm{i}\, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathrm{i}\,(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

(3) Zwei komplexe Zahlen in **trigonometrischer Darstellung** werden multipliziert, indem man die **Beträge** multipliziert und die **Argumente** addiert:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1\,(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_1) \cdot r_2\,(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_2) \\ & r_1 r_2\,(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

(4) Zwei komplexe Zahlen in **Exponentialdarstellung** werden multipliziert, indem man die **Beträge** multipliziert und die **Argumente** addiert:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \exp(\mathrm{i}\,\varphi_1) \cdot r_2 \exp(\mathrm{i}\,\varphi_2) = r_1 r_2 \exp(\mathrm{i}\,(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Division (Ausführung in den Darstellungen (2) bis (4) möglich)

(2) Zwei komplexe Zahlen in **algebraischer Darstellung** werden dividiert, indem man den Quotienten mit der zum Divisor **konjugiert komplexen Zahl** erweitert (Reellmachen des Nenners) und die erhaltenen Faktoren im Zähler ausmultipliziert:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + \mathrm{i}\, b_1}{a_2 + \mathrm{i}\, b_2} = \frac{(a_1 + \mathrm{i}\, b_1)(a_2 - \mathrm{i}\, b_2)}{(a_2 + \mathrm{i}\, b_2)(a_2 - \mathrm{i}\, b_2)} \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \mathrm{i}\, \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \end{aligned}$$

(3) Zwei komplexe Zahlen in **trigonometrischer Darstellung** werden dividiert, indem man die **Beträge** dividiert und die **Argumente** subtrahiert:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1\,(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_1)}{r_2\,(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - \mathrm{i}\,\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - \mathrm{i}\,\sin\varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \left(\frac{\cos\varphi_1\, \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\, \sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} + \mathrm{i}\, \frac{\sin\varphi_1\, \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} \right) \\ &= \frac{r_1}{r_2}\,(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\, \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

(4) Zwei komplexe Zahlen in **Exponentialdarstellung** werden dividiert, indem man die **Beträge** dividiert und die **Argumente** subtrahiert:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \exp(\mathrm{i}\,\varphi_1)}{r_2 \exp(\mathrm{i}\,\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \exp(\mathrm{i}\,(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Beispiel 1.8 $z_1 = a_1 + \mathrm{i}\, b_1 \quad z_2 = \mathrm{i} \left(\textit{also ist } r_2 = 1 \textit{ und } \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \right)$

$$z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \mathrm{i} = -b_1 + \mathrm{i}\, a_1 = r_1(-\sin\varphi_1 + \mathrm{i}\, \cos\varphi_1) = r_1 \exp\left(\mathrm{i}\, \left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{\mathrm{i}} = b_1 - \mathrm{i}\, a_1 = r_1(\sin\varphi_1 - \mathrm{i}\, \cos\varphi_1) = r_1 \exp\left(\mathrm{i}\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

3. Rechenoperationen der 3. Stufe

Potenzieren (Ausführung in den Darstellungen (2) bis (4) möglich)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren $z^0 := 1, \quad z^n := z^{n-1} \cdot z$.

(2) $z^n = (a + \mathrm{i}\, b)^n$ - Das Binom ist auszumultiplizieren.

(2) $z^n = (r(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi))^n = r^n\,(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\,\sin(n\varphi))$ - Formel von **Moivre**

(4) $z^n = r^n\,\exp(\mathrm{i}\, n\,\varphi)$.

Radizieren (i. Allg. nur in Darstellung (3) und (4) möglich)

In $\mathbb{R}$ gilt: Für jedes $\beta \geq 0$ und jede natürliche Zahl $n \geq 2$ existiert **genau eine reelle Zahl** $\alpha \geq 0$, so dass $\alpha^n = \beta$ gilt.

In $\mathbb{C}$ gilt: Für jedes $z \neq (0,0)$ und jede natürliche Zahl $n \geq 2$ existieren **stets** n **verschiedene komplexe Zahlen** $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$, so dass $w_k^n = z$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ gilt.

Berechnungsformeln für die n komplexen Wurzeln:

(3) $$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

(4) $$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\exp\left(\mathrm{i}\,\left(\frac{\varphi + 2k\pi)}{n}\right)\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Der Wert für $k = 0$ heißt **Hauptwert** von $\sqrt[n]{z}$, falls $0 \leq \varphi < 2\pi$ gilt.

Logarithmieren (in Darstellung (4) möglich)

(4) $\ln z = \ln(r\,\exp(\mathrm{i}\,(\varphi + 2k\pi))) = \ln r e^{\mathrm{i}(\varphi+2k\pi)} = \ln r + \mathrm{i}\,(\varphi + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$.

Der **Logarithmus** einer komplexen Zahl besitzt unendlich viele Werte. Der Wert für $k = 0$ heißt **Hauptwert** von $\ln z$, falls $0 \leq \varphi < 2\pi$ gilt.

Beispiel 1.9 (Rechenoperationen der 3. Stufe)

(1) Die binomische Gleichung $w^n = 1$ besitzt die Wurzeln

$$w_k = \sqrt[n]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

(2) Die Gleichung $w^n = -1$ besitzt die Wurzeln

$$w_k = \sqrt[n]{-1} = \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

(3) $\ln(-1) = \ln 1 + \mathrm{i}\,(\pi + 2k\pi) = \mathrm{i}\,(\pi + 2k\pi)$ **Hauptwert:** $\mathrm{i}\,\pi$

(4) $w^2 + 1 = 0$ besitzt die Lösungen $w_0 = +\mathrm{i}$ und $w_1 = -\mathrm{i}$.

(5) $z^2 - 2z + 2 = 0$ besitzt die Lösungen $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ und $z_1 = 1 - \mathrm{i}$.

(6) Stellen Sie $z = (3 + \mathrm{i}\,4)^{(1+\mathrm{i})}$ in trigonometrischer und algebraischer Form dar. ($z = 1.98\,(\cos 2.54 + \mathrm{i}\sin 2.54),\ z = -1.63 + \mathrm{i}\,1.13$).

2 Folgen und Reihen

2.1 Zahlenfolgen (ZF)

Definition 2.1 *Für $l \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $\mathbb{N}_l = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq l\}$. Eine Vorschrift f, die jedem $n \in \mathbb{N}_l$ in* **eindeutiger** *Weise eine* **reelle** *Zahl zuordnet, heißt* **reelle ZF**. *Die Zahl $a_n := f(n)$ heißt dabei n-tes Glied der* **ZF**.

$$\text{Bezeichnungen: } (a_n)_{n\in\mathbb{N}_l} \qquad (a_n)_l^\infty \qquad a_l, a_{l+1}, \ldots, a_n, \ldots$$

Die einzelnen Glieder einer **ZF** lassen sich also durchnummerieren. Die Zahl n stellt den Zählindex dar, d.h., sie gibt an, um das wievielte Glied der **ZF** es sich handelt. Von besonderem Interesse sind **ZF**, die in ihrem Aufbau eine Gesetzmäßigkeit aufweisen.

Wichtige Vorschriften zur Vorgabe einer ZF

1° Vorschrift in Form eines analytischen Ausdrucks:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_n)_0^\infty = ((-1)^n)_0^\infty \qquad \text{alternierende Folge}$$

2° Vorschrift in Form einer Rekursionsformel:

Seien $a_0, d \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt $a_{k+1} = a_k + d$ eine **arithmetische Folge**, d.h., die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder ist konstant.

Seien $a_0, q \in \mathbb{R}\,(q \neq 0)$ gegeben. Dann heißt $a_{k+1} = a_k\, q$ eine **geometrische Folge**, d.h., der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder ist konstant.

Beispiel 2.1 *Ein Startkapital K_0 wird bei einem jährlichen Zinssatz von p%, d.h. einem* **Aufzinsungsfaktor** $(1+\frac{p}{100})$ *angelegt. Die anfallenden Zinsen werden in den folgenden Jahren mitverzinst. Für das Gesamtkapital K_n nach n Jahren ergibt sich die Folge:*

$$\begin{array}{lcl}
K_0 & - & \textit{Startkapital} \\
K_1 & = & K_0\left(1+\dfrac{p}{100}\right) \\
K_2 & = & K_1\left(1+\dfrac{p}{100}\right) \;=\; K_0\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^2 \\
\vdots & & \\
K_n & = & K_{n-1}\left(1+\dfrac{p}{100}\right) \;=\; \ldots \;=\; K_0\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n.
\end{array}$$

Die letzte Zeile liefert die **Leibnizsche Zinseszinsformel**. *Man erhält offensichtlich eine* **geometrische Folge** *mit* $q = \dfrac{K_{n+1}}{K_n} = 1 + \dfrac{p}{100}$.

Eine **reelle ZF** lässt sich in einer Koordinatenebene mit den Achsen n und a_n durch die Punktmenge $\{(n, a_n) \,|\, n \in \mathbb{N}_l\}$, den Graphen der **ZF** (a_n), veranschaulichen.

Definition 2.2 *Wir schreiben anstelle von $\forall\, n \in \mathbb{N}_l$ kurz $\forall\, n$.*

1. *Eine* **ZF** (a_n) *heißt* **konstant** *oder* **stationär**, *gdw ein* $a \in \mathbb{R}$ *existiert, so dass* $a_n = a \quad \forall\, n$.

2. *Eine* **ZF** (a_n) *heißt* **beschränkt**, *gdw ein* $c > 0$ *existiert, so dass* $|a_n| \leq c \quad \forall\, n$.

Geometrische Veranschaulichung der **Beschränktheit**: Alle Punkte (n, a_n) liegen innerhalb oder auf dem Rand eines Streifens der Breite $2c$, parallel zur n-Achse, denn es gilt:

$$|a_n| \leq c \quad \forall\, n \Longleftrightarrow -c \leq a_n \leq c \quad \forall\, n \Longleftrightarrow a_n \in [-c, c].$$

Definition 2.3 *Eine* **ZF** (a_n) *heißt* **Nullfolge**, *gdw zu* **jedem** *(noch so kleinem)* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass für alle* $n \geq n_0(\varepsilon)$ *die Ungleichung* $|a_n| < \varepsilon$ *gilt.*

$$\text{Bezeichnung: } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Für **jedes** $\varepsilon > 0$ liegen also stets unendlich viele **aufeinanderfolgende** Glieder dieser **ZF** innerhalb eines Streifen der Breite 2ε parallel zur n-Achse.

Beispiel 2.2 *Die* **ZF** $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_1^\infty$ *ist eine* **NF**.

Eigenschaften von NF

1° (a_n) **NF** $\Longrightarrow$ (a_n) **beschränkt**.

2° $((a_n)$ **NF** $\wedge$ (b_n) **beschränkt**$)$ $\Longrightarrow$ $(a_n \cdot b_n)$ **NF**.

3° $((b_n)$ **NF** $\wedge\, |a_n| \leq |b_n|\ \forall\, n)$ $\Longrightarrow$ (a_n) **NF**.

4° $((a_n)$ **NF** $\wedge (b_n)$ **NF**$)$ $\Longrightarrow$ $(a_n \pm b_n)$ **NF** $\wedge\, (a_n \cdot b_n)$ **NF**.

5° Der **Quotient** zweier **NF** ist i. Allg. **keine NF**. Z.B. ist der **Quotient** der **NF** $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_1^\infty$ und $(b_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_1^\infty$ eine **konstante Folge** mit $a = 1$, denn $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_1^\infty = (1)_1^\infty$.

Definition 2.4 *Eine* **ZF** (a_n) *heißt* **konvergent** *mit dem* **eigentlichen (endlichen) Grenzwert (GW)** a *gdw* $(a_n - a)$ *eine* **NF** *ist.*

$$\text{Bezeichnung: } \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Beispiel 2.3 *Die* **ZF** $(a_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)_1^\infty$ *ist eine* **konvergente ZF** *mit dem* **GW** 1.

Eigenschaften konvergenter ZF

1° $(\lim_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = b) \Longrightarrow a = b$. Der **GW** einer **ZF** ist **eindeutig** bestimmt.

2° (a_n) **konvergent** $\Longrightarrow$ (a_n) **beschränkt**.

3° $((a_n) \wedge (b_n)$ **konvergent**, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b) \Longrightarrow$ $(a_n \pm b_n) \wedge (a_n \cdot b_n)$ **konvergent** und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}[a_n \pm b_n] = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b \quad \text{sowie} \quad \lim_{n\to\infty}[a_n \cdot b_n] = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b.$$

4° $((a_n) \wedge (b_n)$ **konvergent** $\wedge$ (b_n) **keine NF**) $\Longrightarrow \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ **konvergent** und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n}{b_n}\right] = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

5° $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \wedge \exists\, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \;\forall\, n \geq m) \Longrightarrow a \leq b$. ($\exists$ bedeutet **es existiert ein**)

6° $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \wedge \exists\, m \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n \;\forall\, n \geq m) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Definition 2.5 (Divergente ZF)

1. *Jede* **ZF** (a_n)*, die* **nicht konvergent** *ist, heißt* **divergent**.
2. *Die* **ZF** (a_n) *heißt* **bestimmt divergent** *mit dem* **uneigentlichen (unendlichen) Grenzwert (GW)** $+\infty$ $(-\infty)$ *gdw zu* **jedem** (*noch so großem*) $\omega > 0$ *ein* $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass für alle* $n \geq n_0(\omega)$ *die Ungleichung* $a_n > \omega$ $(a_n < -\omega)$ *gilt.*

   Bezeichnung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad (\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty)$
3. *Die* **ZF** *heißt* **unbestimmt divergent** *gdw* (a_n) **divergent** *und nicht* **bestimmt divergent** *ist, d.h. die* **ZF** *besitzt* **keinen GW**.

Beispiel 2.4 (Divergente ZF)

(1) Die **ZF** $(a_n) = (n)_0^\infty$ *ist* **nicht beschränkt**. *Sie ist* **bestimmt divergent** *mit dem* **uneigentlichen GW** $+\infty$, *d.h. es gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(2) Die **ZF** $(a_n) = ((-1)^n)_0^\infty$ *ist* **unbestimmt divergent**.

Unter der Voraussetzung, dass alle benötigten **GW** als **eigentliche GW** existieren, kann die Berechnung von **GW** mit Hilfe der **Eigenschaften** 3° und 4° für **konvergente ZF** auf bereits bekannte **GW** zurückgeführt werden.

Beispiel 2.5 (Grenzwertberechnung)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{3n+2} = \dfrac{2}{3}$

(2) $(a_n) = (b_n) = ((-1)^n)_0^\infty$

Beide **GW** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *existieren nicht, aber* $\lim\limits_{n\to\infty} [a_n \cdot b_n] = 1$. *Folglich ist*

$$\lim_{n\to\infty} [a_n \cdot b_n] \neq \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + a\,n + b} - n) = \dfrac{a}{2}$

2.2 Reihen mit konstanten Gliedern

Definition 2.6 (Reihe, Konvergenz, Divergenz)

1. *Sei* $(a_k)_{k=l}^\infty$, $l \in \mathbb{N}_0$, $a_k \in \mathbb{R}$ *eine* **ZF**. *Der durch Summation der* **Glieder** *der* **ZF** *formal gebildete Ausdruck*

$$a_l + a_{l+1} + a_{l+2} + \ldots = \sum_{k=l}^{\infty} a_k$$

heißt **(unendliche) Reihe**, a_k *heißen die* **Glieder** *der* **Reihe**. *Die Summe der ersten* $n+1$ **Glieder** *der* **Reihe**

$$a_l + a_{l+1} + \ldots + a_{l+n} = \sum_{k=l}^{l+n} a_k := s_n$$

(n *fest*) *heißt* n*-te* **Partialsumme** *der* **Reihe**.

2. *Eine* **Reihe** *heißt* **konvergent**, *wenn die Folge* $(s_n)_{n=l}^\infty$ *ihrer* **Partialsummen konvergiert**. *Dann heißt der* **GW** $s = \lim s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=l}^{l+n} a_k$ **Summe** *der* **Reihe**.

3. *Existiert auch der* **GW** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=l}^{n} |a_k|$, *so heißt die unendliche Reihe* $\sum\limits_{k=l}^{\infty} a_k$ **absolut konvergent**.

4. *Eine* **Reihe** *heißt* **divergent**, *wenn die Folge* $(s_n)_{n=l}^\infty$ *ihrer* **Partialsummen (bestimmt)** *oder* **(unbestimmt) divergiert**.

Bei einer **konvergenten Reihe** mit der **Summe** s schreibt man $\sum\limits_{k=l}^{\infty} a_k = s$ anstelle von $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

Beispiel 2.6 *Wir betrachten die* **geometrische Reihe** *mit dem Anfangsglied* $a_0 = 1$

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \qquad (q \in \mathbb{R}).$$

Ist $q \neq 1$, *so gilt folgende Formel für die* n*-te* **Partialsumme** *dieser* **Reihe**:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Für die Folge der **Partialsummen** *gilt:*

$$(s_n) \quad \textit{ist} \quad \begin{cases} \textbf{konvergent} & \textit{für} \quad |q| \; < \quad 1, \quad (\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q} = s), \\ \textbf{bestimmt divergent} & \textit{für} \quad q \; > \quad 1, \quad (\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty), \\ \textbf{unbestimmt divergent} & \textit{für} \quad q \; < \; -1, \quad (\lim\limits_{n\to\infty} s_n \quad \textit{existiert nicht}), \\ \textbf{bestimmt divergent} & \textit{für} \quad q \; = \quad 1, \quad (\lim\limits_{n\to\infty} s_n = n+1 = +\infty), \\ \textbf{unbestimmt divergent} & \textit{für} \quad q \; = \; -1, \quad (\lim\limits_{n\to\infty} s_n \quad \textit{existiert nicht}). \end{cases}$$

Konvergenzuntersuchungen von **Reihen** lassen sich also auf **Konvergenzuntersuchungen** von **ZF** zurückführen. Das Auffinden von Formeln für die n-ten **Partialsummen** ist aber oft nicht möglich. Deshalb sind **Konvergenzkriterien** erforderlich.

Notwendiges Konvergenzkriterium:

$$\sum_{k=l}^{\infty} a_k \quad \textbf{konvergent} \quad \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage

$$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0 \Longrightarrow \sum_{k=l}^{\infty} a_k \quad \text{ist } \textbf{nicht konvergent}\text{, also } \textbf{divergent}.$$

Beispiel 2.7 *Die* **Reihe** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k}$ *ist* **divergent**,

denn $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \neq 0.$

Das Kriterium ist nur **notwendig**, aber nicht **hinreichend**.

Beispiel 2.8 *Die* **Reihe** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ *ist* **divergent**, *obwohl* $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}} = 0$,

denn $s_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > n\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, *also* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

Hinreichende Konvergenzkriterien:

1. **Quotientenkriterium (QK)** in **GW**-Form: Es existiere $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|$.

   Ist $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, so **konvergiert** die **Reihe** $\sum\limits_{k=l}^{\infty} a_k$ **absolut**.

   Ist $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, so **divergiert** die **Reihe** $\sum\limits_{k=l}^{\infty} a_k$.

   Ist $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$, so liefert das **QK** keine Aussage.

2. **Wurzelkriterium (WK)** in **GW**-Form: Es existiere $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

   Ist $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so **konvergiert** die **Reihe** $\sum\limits_{k=l}^{\infty} a_k$ **absolut**.

   Ist $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, so **divergiert** die **Reihe** $\sum\limits_{k=l}^{\infty} a_k$.

   Ist $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$, so liefert das **WK** keine Aussage.

Für Reihen mit sämtlich positiven Gliedern entfallen die Beträge und das Wort **absolut** bei der Konvergenz.

Vergleich zwischen dem QK und dem WK:
Wenn $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ existiert, dann existiert auch $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ und es gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, d.h. wenn das **QK** eine Aussage über das Verhalten der **Reihe** liefert, so erhält man die gleiche Aussage auch mit dem **WK**. Die Umkehrung gilt nicht. Das **WK** ist stärker als das **QK**.

Beispiel 2.9 (QK, WK)

(1) Die **Reihe** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k!}{k^k}$ **konvergiert** *nach dem* **QK absolut**,

denn $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k^k}{(k+1)^k} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

(2) Die **Reihe** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{3k-1}\right)^k$ **konvergiert** *nach dem* **WK**,

denn $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2k+1}{3k-1} = \frac{2}{3}$.

2.3 Anwendungen aus der Finanzmathematik

2.3.1 Zins- und Zinseszinsrechnung

Unter dem Begriff **Zinsen** versteht man die Vergütung für die Überlassung eines Geldbetrages in einer bestimmten Zeit (**Zinsperiode**). Die Höhe der **Zinsen** hängt von den folgenden drei Einflussgrößen ab: vom **Startkapital** (Geldbetrag), von der **Laufzeit** (Dauer der Überlassung) und vom **Zinssatz** oder **Zinsfuß** (Betrag an **Zinsen** in €, der für einen Geldbetrag von 100 € in einer **Zinsperiode** zu zahlen) ist.

1. **Einfache Verzinsung:** Am Ende der Zinsperiode werden die Zinsen ausgezahlt bzw. einem anderen Konto gutgeschrieben. Mit den Bezeichnungen:

   K_0 – Startkapital,

   t – Teil der Zinsperiode und

   p – Zinssatz (in %)

erhält man die Formeln

$$
\begin{aligned}
Z_t &= K_0 \frac{p}{100} t \quad \text{- Zinsen für die Zeit t,} && (2.1)\\
K_t &= K_0 + Z_t = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} t\right) \quad \text{- Zeitwert zum Zeitpunkt t,} && (2.2)\\
K_0 &= \frac{K_t}{1 + \frac{p}{100} t} \quad \text{- Zeitwert für t = 0 (Barwert).} && (2.3)
\end{aligned}
$$

Der Zeitwert zum Zeitpunkt t ist gleichzeitig das Endkapital nach der Zeit t. Die Größe t bezeichnet also zum einen den **Zeitpunkt**, zum anderen den **Zeitraum**. Da (in Deutschland) ein Jahr zu 360 und jeder Monat zu 30 Zinstagen angenommen wird, kann man auch $t = \dfrac{T}{360}$ setzen, wobei T die Anzahl der Zinstage ist.

Beispiel 2.10 *Ein am 11.03. eines Jahres eingezahlter Betrag von 3 000 € wird am 16.08. desselben Jahres wieder abgehoben. Wieviel Zinsen erbringt er bei einer jährlichen Verzinsung von 5 %?* $(Z_t = 64.58$ €)

2. **Zinseszinsrechnung:** Am Ende einer Zinsperiode werden die Zinsen dem Kapital zugeschlagen und im Weiteren mit verzinst. Mit den Bezeichnungen:

   n – Anzahl der Zinsperioden (Jahre),

   i – Zinsrate,

   q – Aufzinsungsfaktor und

   K_n – Kapital am Ende des n-ten Jahres (Endwert, Zeitwert nach n Jahren),

   wobei $i = \dfrac{p}{100}$ und $q = 1 + i$ ist, erhält man die Formeln

$$
\begin{aligned}
K_n &= K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K_0 \,(1+i)^n = K_0 \, q^n \quad \text{- Zeitwert nach n Jahren,} && (2.4)\\
K_0 &= K_n \, q^{-n} \quad \text{- Barwert,} && (2.5)\\
p &= 100 \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right) \quad \text{- Zinssatz,} && (2.6)\\
n &= \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln(1+i)} \quad \text{- Laufzeit.} && (2.7)
\end{aligned}
$$

Die Formel (2.4) ist die **Leibnizsche Zinseszinsformel** (vgl. Beispiel 2.1). Der **Aufzinsungsfaktor** q^n für n Jahre gibt an, auf welchen Betrag ein Kapital von 1 € bei einem **Zinssatz** p und Wiederanlage nach n Jahren anwächst, während der **Abzinsungsfaktor** q^{-n} für n Jahre aufzeigt, welchen Wert ein nach n Jahren erreichtes Endkapital von 1 € zum Zeitpunkt $t = 0$ besitzt. Die Berechnung des **Barwertes** nennt man auch **Abzinsen** oder **Diskontieren**.

Beispiel 2.11 (Zinseszinsrechnung)

(1) *Ein Bürger kauft Finanzierungsschätze des Bundes (Laufzeit 2 Jahre) im Nominalwert von 5 000 € und muss dafür 4 441.60 € bezahlen. Welcher Verzinsung pro Jahr entspricht dies?* (*6.10 %*)

(2) *Am 01.01.2002 verleiht A an B 10 000 € zu 10 % Zinsen/Jahr. Welchen Betrag muss B am Rückzahlungstermin, dem 31.12.2008, zurückzahlen bei*

   a) *einfacher Verzinsung,* (*17 000 €*)

   b) *Verzinsung mit Zinseszins?* (*19 487.17 €*)

2.3.2 Rentenrechnung

Eine in gleichen Zeitabständen erfolgende Zahlung in bestimmter Höhe nennt man **Rente**. Diese Zahlungen können einem Guthaben entnommen werden, so dass dieses nach einer endlichen Anzahl von Zahlungen erlöschen kann. Die Zahlungen können aber auch dazu dienen, ein Guthaben anzusammeln.

Dabei bezeichnet r die Höhe der **Ratenzahlung** und n die Anzahl der **Ratenzahlungen** bzw. **Perioden**.

Eine **Rente** heißt **vorschüssig**, wenn die Zahlungen **zu Beginn** jeder Periode erfolgen und **nachschüssig**, wenn die Zahlungen **am Ende** jeder Periode erfolgen.

Zur Vereinfachung der Darlegungen vereinbaren wir, dass die **Ratenperiode gleich der Zinsperiode (gleich einem Jahr)** ist.

Ferner unterscheidet man **Zeitrenten** (von begrenzter Dauer) und **ewige Renten** (von unbegrenzter Dauer).

Diese können in Bezug auf ihre **Rentenhöhe** sowohl **starr** (gleichbleibende Rente) oder **dynamisch** (veränderliche, meist wachsende Rente) sein. Wir betrachten hier nur **Renten konstanter Höhe**. Uns interessiert der **Barwert** B und der **Endwert** E aller Rentenzahlungen.

1. **Vorschüssige Zeitrenten**

   Der **Rentenendwert** E_n^V ist derjenige Betrag, der zum Zeitpunkt n ein Äquivalent für die n zu zahlenden Raten darstellt. Zur Berechnung von E_n^V bestimmen wir die Endwerte der einzelnen Zahlungen gemäß (2.4) mit $K_0 = r$. Entsprechend den unterschiedlichen Zahlungszeitpunkten werden die Raten der Höhe r über eine unterschiedliche Anzahl von Perioden aufgezinst. Anschließend werden alle Endwerte aufsummiert:

   $$E_n^V = rq + rq^2 + \ldots + rq^{n-1} + rq^n = rq(1 + q + \ldots + q^{n-1}).$$

   Nach der Formel für die n-te **Partialsumme** einer **geometrischen Reihe** (vgl. Beispiel 2.6) ergibt sich:

   $$E_n^V = rq\frac{1-q^n}{1-q}. \tag{2.8}$$

   Der **Rentenbarwert** B_n^V ist derjenige Betrag, der zum Zeitpunkt 0 einmalig angelegt werden müsste, um zum Zeitpunkt n den **Rentenendwert** E_n^V zu erreichen. Man erhält ihn durch **Abzinsen** von (2.8) über n Jahre (vgl. Formel (2.5)):

   $$B_n^V = q^{-n}\, E_n^V = \frac{r\,q}{q^n}\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{r}{q^{n-1}}\frac{1-q^n}{1-q}. \tag{2.9}$$

Vorschüssiger Rentenendwertfaktor (Rentenbarwertfaktor) heißt die Zahl

$$REF^V = q\,\frac{1-q^n}{1-q} \qquad \left(RBF^V = \frac{1}{q^{n-1}}\frac{1-q^n}{1-q}\right). \tag{2.10}$$

2. **Nachschüssige Zeitrenten**

   Der **Rentenendwert** E_n^N wird wieder durch Addition der n einzelnen Zahlungen errechnet. Da die Zahlungen hier am Ende der Periode erfolgen, erhält man

   $$E_n^N = r + rq + \ldots + rq^{n-1} = r(1 + q + \ldots + q^{n-1}) = r\frac{1-q^n}{1-q}. \tag{2.11}$$

   Der **Rentenbarwert** B_n^N ergibt sich wieder durch **Abzinsen** des Ausdrucks (2.11) über n Jahre

   $$B_n^N = q^{-n}\,E_n^N = \frac{r}{q^n}\frac{1-q^n}{1-q}. \tag{2.12}$$

   Nachschüssiger Rentenendwertfaktor (Rentenbarwertfaktor) heißt die Zahl

   $$REF^N = \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \left(RBF^N = \frac{1}{q^n}\frac{1-q^n}{1-q}\right). \tag{2.13}$$

Die nachstehende Tabelle zeigt die Zusammenhänge zwischen **Bar-** und **Endwerten** von **vor-** und **nachschüssigen Renten**.

	Vorschüssige Rente	**Nachschüssige Rente**
Rentenbarwert	$B_n^V = q^{-n} \cdot E_n^V = r \cdot RBF^V$	$B_n^N = q^{-n} \cdot E_n^N = r \cdot RBF^N$
Rentenendwert	$E_n^V = q^n \cdot B_n^V = r \cdot REF^V$	$E_n^N = q^n \cdot B_n^N = r \cdot REF^N$

Beispiel 2.12 *Ein Großvater zahlt für seine Enkelin jeweils zu Jahresende 1 200 € bei einer Bank ein. Auf welchen Betrag sind die Einzahlungen nach 15 Jahren bei 6.5 % jährlicher Verzinsung angewachsen und welchem Barwert entspricht dieses Guthaben?* (E_n^N = *29 018.60 €*, B_n^N = *11 283.20 €*)

3. **Ewige Renten**

   Es sind unter der in der Finanzmathematik stets erfüllten Voraussetzung $q = 1+i > 1$ die **GW** der Ausdrücke (2.8),(2.9),(2.11) und (2.12) für $n \to \infty$ zu berechnen:

   $$\begin{aligned} E_\infty^V &= \lim_{n\to\infty} E_n^V = +\infty & B_\infty^V &= \lim_{n\to\infty} B_n^V = \frac{r\,q}{q-1} = r\cdot\frac{100+p}{p} \\ E_\infty^N &= \lim_{n\to\infty} E_n^N = +\infty & B_\infty^N &= \lim_{n\to\infty} B_n^N = \frac{r}{q-1} = r\cdot\frac{100}{p}. \end{aligned}$$

   Somit ist die Frage nach einem **Endwert** der **ewigen Rente** nicht sinnvoll. Der **Barwert** ist allerdings von Interesse, z.B. bei Stiftungen, bei denen nur die Zinsen ausgezahlt werden sollen und das eigentliche Kapital unangetastet bleiben soll.

Beispiel 2.13 *Ein Unternehmen stiftet einen Betrag, aus dessen Zinserträgen jährlich (vorschüssig) ein Preis von 1 000 € verliehen werden soll. Wie hoch ist der Betrag bei einer Verzinsung von 7 %?* (*15 285.71 €*)

3 Reelle Funktionen einer reellen Variablen

3.1 Der Funktionsbegriff

Definition 3.1 (Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich)

1. *Eine Vorschrift f, die* **jedem** *Element x einer Menge X in* **eindeutiger** *Weise ein Element y einer Menge Y zuordnet (d.h.* **jedem** *$x \in X$ wird* **genau** *ein Element $y \in Y$ zugeordnet), heißt* **Funktion**.

2. *Die Menge X heißt* **Definitionsbereich** *$D(f)$ der Funktion f, während die Menge $W(f) = \{y \in Y \,|\, \exists\, x \in D(f) : y = f(x)\} \subseteq Y$* **Wertebereich** *von f genannt wird.*

3. *Gilt $X \subseteq \mathbb{R}$ und $Y \subseteq \mathbb{R}$, so spricht man von* **reellen Funktionen einer reellen Variablen**. *Dabei heißt x* **unabhängige Variable** *und y* **abhängige Variable**.

Wegen der **Eindeutigkeit** der Zuordnung ist eine Funktion gegeben durch

$$y = f(x) \qquad x \in D(f).$$

Fehlt bei Vorgabe einer Funktion die Angabe über $D(f)$, so verstehen wir unter $D(f)$ die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die f sinnvoll ist (maximal möglicher Definitionsbereich).

Der **Definitionsbereich** einer Funktion besteht häufig aus allen zwischen zwei reellen Zahlen a und b liegenden Zahlen. Eine solche Zahlenmenge wird als **Intervall** bezeichnet.

Definition 3.2 *Es gelte $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann heißt*

$$\begin{array}{rcll} [\,a,b\,] & = & \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge a \le x \le b\} & \textit{abgeschlossenes Intervall in } \mathbb{R}, \\ ]\,a,b\,[& = & \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\} & \textit{offenes Intervall in } \mathbb{R}, \\ [\,a,b\,[& = & \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge a \le x < b\} & \textit{rechtsoffenes Intervall in } \mathbb{R}, \\ ]\,a,b\,] & = & \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge a < x \le b\} & \textit{linksoffenes Intervall in } \mathbb{R}. \end{array}$$

Die beiden letztgenannten Intervalle heißen auch halboffene Intervalle in $\mathbb{R}$. Die Punkte a, b heißen Randpunkte dieser Intervalle.

Die Fälle $a = -\infty$ oder $b = +\infty$ sind zulässig. Man spricht dann von unbeschränkten Intervallen. Gilt $a = -\infty$ und $b = +\infty$, so ist $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Die Punktmenge $U_\varepsilon(a) =]\,a-\varepsilon, a+\varepsilon\,[$ heißt ε-Umgebung des Punktes a.

Beispiel 3.1 *Funktionen der Gestalt*

$$y = f(x) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-cx}} \qquad D(f) =]-\infty, +\infty[$$

$(a, b, c > 0)$ heißen **logistische Funktionen**. *Sie beschreiben Wachstumsprozesse für einen Bestand y bez. der Zeit x, z.B. Spareinlagen, Steuereinnahmen, die eine Sättigungsgrenze a besitzen.*

Darstellungsmöglichkeiten reeller Funktionen:

- Verbale Darstellung
- Darstellung durch eine Tabelle von Messwerten (empirische Funktion)
- Grafische Darstellung: Die Menge $\{(x, f(x)) \,|\, x \in D(f)\}$ heißt Graph von f.
- Analytische Darstellung:

  1° Explizite Darstellung: $y = f(x) \qquad x \in D(f)$
  2° Implizite Darstellung: $F(x, y) = 0$.

Definition 3.3 *Erfüllt die Funktion $y = f(x) \quad x \in D(f)$ die Gleichung*

$$F(x, y) = 0, \tag{3.1}$$

d.h. gilt $F(x, f(x)) = 0$ für **alle** *$x \in D(f)$, so heißt $y = f(x)$ eine durch $F(x, y) = 0$* **implizit** *definierte* **Funktion** *von x.*

Beispiel 3.2 (Implizit definierte Funktionen)

(1) Durch (3.1) können mehrere **Funktionen implizit** *definiert sein, z.B. sind durch*

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

zwei **Funktionen implizit** *erklärt:*

$$\begin{aligned} y &= f_1(x) = +\sqrt{1 - x^2} \qquad x \in D(f_1) = [-1, +1], \\ y &= f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2} \qquad x \in D(f_2) = [-1, +1]. \end{aligned}$$

(2) Durch (3.1) ist nicht notwendig eine **Funktion implizit** *definiert, z.B. ist durch*

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

keine **Funktion implizit** *erklärt.*

(3) $F(n, q) = 2\,000 \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q} - 30\,000 = 0$ ist nicht **explizit** *nach q auflösbar.*

3.2 Eigenschaften reeller Funktionen

Definition 3.4 (Beschränktheit, Monotonie, Periodizität)

1. *f heißt auf $D(f)$* **beschränkt** *gdw $\exists\, c > 0 : |f(x)| \leq c \quad \forall\, x \in D(f)$,*
2. *f heißt auf $D(f)$* **konstant** *gdw $\exists\, a > 0 : f(x) = a \quad \forall\, x \in D(f)$,*
3. *f heißt auf $D(f)$* **monoton wachsend** *gdw $f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in D(f)$ mit $x_1 < x_2$,*
4. *f heißt auf $D(f)$* **monoton fallend** *gdw $f(x_1) \geq f(x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in D(f)$ mit $x_1 < x_2$,*

5. *f heißt auf $D(f)$* **streng monoton wachsend** *gdw* $f(x_1) < f(x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in D(f)$ *mit* $x_1 < x_2$,

6. *f heißt auf $D(f)$* **streng monoton fallend** *gdw* $f(x_1) > f(x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in D(f)$ *mit* $x_1 < x_2$,

7. *f heißt auf $D(f)$* **periodisch** *mit der Periode $p \neq 0$ gdw*

   1° $x \in D(f) \Longrightarrow x + p \in D(f)$,

   2° $f(x+p) = f(x) \quad \forall\, x \in D(f)$,

8. *f heißt auf $D(f)$* **gerade** *gdw*

   1° $x \in D(f) \Longrightarrow -x \in D(f)$,

   2° $f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \in D(f)$,

9. *f heißt auf $D(f)$* **ungerade** *gdw*

   1° $x \in D(f) \Longrightarrow -x \in D(f)$,

   2° $f(-x) = -f(x) \quad \forall\, x \in D(f)$,

10. $f_1 = f_2$ *gdw*

    1° $D(f_1) = D(f_2)$,

    2° $f_1(x) = f_2(x) \quad \forall\, x \in D(f_1)$.

Beispiel 3.3 *Sei*

$$f_1 : \; f_1(x) = a \qquad x \in D(f_1) = [-1, 1] \qquad\qquad f_2 : \; f_2(x) = a \qquad x \in D(f_2) = [0, 5].$$

Dann ist $f_1 \neq f_2$.

Definition 3.5 *Sei $y = f(x)$ $x \in D(f)$ eine* **Funktion**, *d.h., sie ordnet* **jedem** *Element $x \in D(f) = X$* **genau** *ein Element $y \in W(f) \subseteq Y$ zu. Gilt auch die Umkehrung, d.h., gehört zu* **jedem** *Element $y \in W(f)$* **genau** *ein Element $x \in X$, so heißt die* **Funktion**

$$f : D(f) \to W(f)$$

eineindeutig *und die* **Funktion** *f besitzt eine* **Umkehrfunktion**, *die mit f^{-1} bezeichnet wird.*

Berechnung der Umkehrfunktion

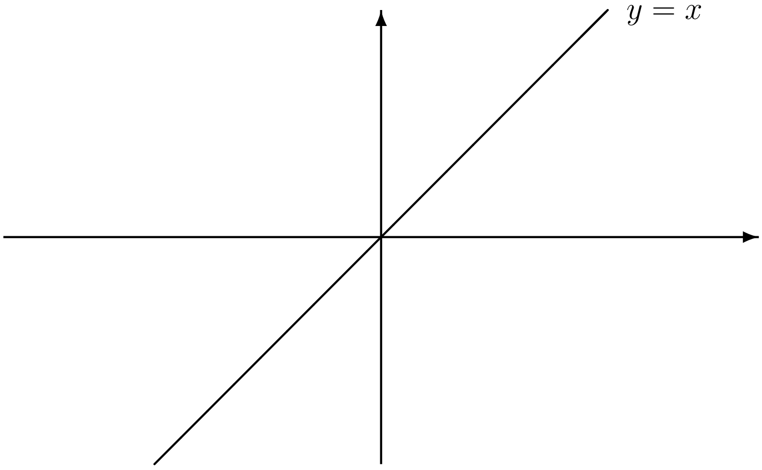
1° Man löst die vorgegebene Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach der **unabhängigen Variablen** x auf (diese Auflösung muss **eindeutig** möglich sein). Die so erhaltene Funktion $x = f^{-1}(y)$ ist die **Umkehrfunktion** von $y = f(x)$.

2° Durch formales Vertauschen der beiden Variablen in der Gleichung $x = f^{-1}(y)$ erhält man $y = f^{-1}(x)$.

Z.B. gilt für eine **streng monoton wachsende** Funktion f mit $D(f) = [a, b] \;\; a < b$:

analyt. D.	**Definitionsbereich**	**Wertebereich**
$y = f(x)$	$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \| a \leq x \leq b\}$	$W(f) = \{y \in \mathbb{R} \| f(a) \leq y \leq f(b)\}$
$x = f^{-1}(y)$	$D(f^{-1}) = W(f)$	$W(f^{-1}) = D(f)$
$y = f^{-1}(x)$	$D^*(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \| f(a) \leq x \leq f(b)\}$	$W^*(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \| a \leq y \leq b\}$

Die Funktionen $y = f(x)$ und $x = f^{-1}(y)$ besitzen denselben Graphen. Der Graph von $y = f^{-1}(x)$ stellt eine Spiegelung des Graphen von $x = f^{-1}(y)$ an der Geraden $y = x$ dar. Dabei geht $D(f) = W(f^{-1})$ in $W^*(f^{-1})$ und $W(f) = D(f^{-1})$ in $D^*(f^{-1})$ über.



Beispiel 3.4 (Existenz einer Umkehrfunktion)

(1) $y = f(x) = x^2 \quad D(f) = \mathbb{R}, \qquad W(f) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq y < \infty\} = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq 0\},$
f *ist nicht* **eineindeutig**, *es existiert* **keine Umkehrfunktion**.

(2) $y = f_1(x) = x^2 \quad D(f_1) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}, \qquad W(f_1) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq 0\},$
f_1 *ist* **eineindeutig**, *es existiert* **eine Umkehrfunktion**

$$y = f_1^{-1}(x) = +\sqrt{x} \quad D^*(f_1^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}, \qquad W^*(f_1^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq 0\},$$

(3) $y = f_2(x) = x^2 \quad D(f_2) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0\}, \qquad W(f_2) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq 0\},$
f_2 *ist* **eineindeutig**, *es existiert* **eine Umkehrfunktion**

$$y = f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x} \quad D^*(f_2^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}, \qquad W^*(f_2^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \leq 0\}.$$

(4) $y = f(x) = x^3 \quad D(f) = \mathbb{R}, \qquad W(f) = \mathbb{R},$
f *ist* **eineindeutig**, *es existiert* **eine Umkehrfunktion**

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} x^{1/3} & \text{für } x \geq 0 \\ -(-x)^{1/3} & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \quad D^*(f^{-1}) = \mathbb{R}, \qquad W^*(f^{-1}) = \mathbb{R}.$$

In diesem Fall ist die Funktion f und auch ihre **Umkehrfunktion** f^{-1} **streng monoton wachsend**.

Theorem 3.1 *Jede* **streng monotone** *Funktion f einer reellen Variablen besitzt eine* **Umkehrfunktion** f^{-1}, *die ebenfalls* **streng monoton** *ist. Ist f* **streng monoton wachsend (fallend)**, *so ist auch f^{-1}* **streng monoton wachsend (fallend)**.

Definition 3.6 *Es seien $x = g(t) \quad t \in D(g)$ und $y = f(x) \quad x \in D(f)$ Funktionen, die der Eigenschaft $W(g) \subseteq D(f)$ genügen. Dann heißt*

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) \quad t \in D(g) \qquad (f \circ g \textit{ wird gelesen } f \textit{ von } g)$$

mittelbare (verkettete) Funktion.

Beispiel 3.5 (Mittelbare Funktionen)

(1) $x = g(t) = \sqrt{3+2t} \quad D(g) = \{t \in \mathbb{R} \,|\, t \geq -\frac{3}{2}\}, \qquad W(g) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\},$
$y = f(x) = \cos x \quad D(f) = \mathbb{R}_x, \qquad W(f) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq y \leq 1\}$
Es gilt: $W(g) \subset D(f)$.
Eine **mittelbare Funktion** $f(g(t))$ *existiert und hat die Gestalt:*
$y = \cos(\sqrt{3+2t}) = f(g(t)) \quad t \in D(g)$.

(2) Die Bedingung $W(g) \subseteq D(f)$ ist wesentlich:
$x = g(t) = \sin t \quad D(g) = \mathbb{R}_t, \qquad W(g) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq x \leq 1\}$
$y = f(x) = \ln x \quad D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}, \qquad W(f) = \mathbb{R}_y$
Es gilt: $W(g) \not\subseteq D(f)$.
Eine **mittelbare Funktion** $f(g(t))$ *ist nicht erklärt. Abhilfe: Bildung einer Ersatzfunktion*
$x = g_1(t) = \sin t$ *mit* $D(g_1) = \{t \in \mathbb{R} \,|\, 0 < t < \pi\} \subset D(g)$. *Für den Wertebereich gilt nun* $W(g_1) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x \leq 1\}$ *Somit ist wegen* $W(g_1) \subset D(f)$ *eine* **mittelbare Funktion** $f(g_1(t))$ *korrekt erklärt. Sie hat die Gestalt:* $y = \ln \sin t = f(g_1(t)) \quad t \in D(g_1)$.

3.3 Rationale Funktionen

3.3.1 Ganze rationale Funktionen

Definition 3.7 (Ganze rationale Funktion, Nullstellen)

1. *Eine Funktion der Gestalt*

$$p_n(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0 \qquad D(p_n) = \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

heißt **ganze rationale Funktion** *oder* **Polynom**.

Die **reellen** *Zahlen* $a_n (\neq 0), a_{n-1}, \ldots, a_0$ *heißen* **Koeffizienten**, *die Zahl* $n \in \mathbb{N}_0$ *der* **Grad** *des* **Polynoms**.

2. *Gilt* $p_n(x_0) = 0$ *für eine* **reelle** *oder* **komplexe Zahl** x_0, *so heißt* x_0 **Nullstelle (NS)** *oder* **Wurzel** *des* **Polynoms** $p_n(x)$. *Gilt* $x_0 \in \mathbb{R}$, *so ist* $x_0 \in D(p_n)$.

Beispiel 3.6 (Ganze rationale Funktionen)

(1) $n = 0,\ y = p_0(x) = a_0$ – *konstante Funktion*

(2) $n = 1,\ y = p_1(x) = a_1 x + a_0$ – *lineare Funktion*

(3) $n = 2,\ y = p_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ – *quadratische Funktion*

(4) $n = 3,\ y = p_3(x) = a_3 x^3 + \ldots + a_0$ – *Polynom 3. Grades*

(5) $n = 4,\ y = p_4(x) = a_4 x^4 + \ldots + a_0$ – *Polynom 4. Grades*

Der Graph einer quadratischen Funktion heißt **Parabel**. Für $a_2 > 0$ ist diese nach oben geöffnet, für $a_2 < 0$ nach unten. Der **Scheitel** der **Parabel** besitzt die Koordinaten $(x_s, p_2(x_s)) = \left(-\frac{a_1}{2a_2}, a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}\right)$.

Beispiel 3.7 *Die Preis-Absatzrelation eines Unternehmens sei*

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 10.$$

Dabei bezeichnet x den Preis und f den Absatz. Sein Erlös ist dann gleich

$$E(x) = x \cdot f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10x = -\frac{1}{2}(x-10)^2 + 50.$$

Der Scheitel dieser Parabel besitzt die Koordinaten: $(x_s, E_s) = (10, 50)$, d.h. für $x_s = 10$ nimmt der Erlös sein Maximum an.

Theorem 3.2 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes* **Polynom** $p_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ *mit* **komplexen Koeffizienten** *lässt sich als Produkt von n Linearfaktoren in der Form*

$$p_n(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \tag{3.3}$$

darstellen, wobei die x_i $(i = 1, \ldots, n)$ i. Allg. **komplexe Zahlen** *sind, d.h. ein* **Polynom n-ten Grades** *kann* **höchstens n verschiedene NS** *besitzen.*

Eigenschaften von NS für Polynome mit reellen Koeffizienten

1° Besitzt ein **Polynom** mit **reellen Koeffizienten** eine **komplexe NS** der Gestalt $x_1 = a + \mathrm{i}\, b$, so ist auch $\overline{x_1} = a - \mathrm{i}\, b$ **NS** dieses **Polynoms**. In der Darstellung (3.3) treten dann (reelle) quadratische Terme auf:

$$(x - x_1)(x - \overline{x_1}) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = x^2 + px + q \quad \text{mit} \quad p = -2a, q = a^2 + b^2.$$

2° Jedes **Polynom ungeraden Grades** mit **reellen Koeffizienten** besitzt mindestens eine **reelle NS**.

Definition 3.8 *Ist ein* **Polynom** *vom* **Grade** *n in der Form $p_n(x) = (x - x_0)^k\, p_{n-k}(x)$ darstellbar, wobei $p_{n-k}(x_0) \neq 0$ ist und p_{n-k} den* **Grad** *$n - k$ besitzt, so heißt x_0* **k-fache NS (NS der Vielfachheit k)** *von $p_n(x)$.*

Beispiel 3.8 (NS *von* Polynomen)

(1) $p_3(x) = x^3 + x^2 - x - 1 \qquad x_0 = 1$ *ist* **einfache NS**, $x_1 = -1$ *ist* **zweifache NS**,

$p_3(x) = (x-1)\,(x+1)^2 = (x-1)\,(x+1)\,(x+1) = (x-1)(x+1)^2$

(2) $p_3(x) = x^3 - x^2 + x - 1 \qquad x_0 = 1$ *ist* **einfache NS**,

$p_3(x) = (x-1)\,(x^2+1) = (x-1)\,(x+\mathrm{i})\,(x-\mathrm{i}) = (x-1)(x^2+1)$

Nullstellen von Polynomen höheren Grades berechnet man mit dem Taschenrechner.

Interpolation durch Polynome

Bei Messungen erhält man eine Funktion in Form einer Wertetabelle als eine Anzahl von diskreten Messpunkten. Es ist jedoch bekannt, dass die Funktion auch zwischen diesen Punkten definiert ist. In einem solchen Fall kann man die Punkte durch eine Kurve verbinden. Diesen Vorgang bezeichnet man als **Interpolation**.

(I) Lineare Interpolation

Gegeben: $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$.

Gesucht: Näherung für $f(c)$ für $c \in]\,x_1, x_2\,[$.

Lösung: Bei **linearer Interpolation** existiert stets eine **eindeutige Lösung**.

- Aufstellen der Sekantengleichung durch die beiden gegebenen Punkte:

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,(x - x_1).$$

- Berechnung des Funktionswertes dieser Geraden im Punkt $x = c$:

$$d = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,(c - x_1).$$

- Setzen $f(c) \approx d$, d.h. d wird als Näherungswert für $f(c)$ angenommen. Der Fehler wird u. U. sehr groß.

(II) Allgemeine Interpolationsaufgabe

Gegeben: $(x_i, f(x_i))$ mit $x_i \in [a, b] \quad (i = 1, \ldots, n), \quad x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Dabei sind x_i die **Stützstellen**, $f(x_i)$ die **Stützwerte** und $(x_i, f(x_i))$ die **Interpolationsknoten** für $i = 1, \ldots, n$. Das Intervall $[a, b]$ ist das **Interpolationsintervall**.

Gesucht: $f(x)$ für ein beliebiges $x \in [a, b]$.

Lösung: Die Existenz einer **eindeutigen Lösung** der **allgemeinen Interpolationsaufgabe** folgt aus dem Satz:

Theorem 3.3 *Für n vorgegebene* **Interpolationsknoten** $(x_i, f(x_i))$ $(i = 1, \ldots, n)$ **existiert genau ein Polynom** $p_{n-1}(x)$ *von höchstens* $(n-1)$**-tem Grade**, *für welches gilt:* $f(x_i) = p_{n-1}(x_i) \qquad (i = 1, \ldots, n)$.

Es gibt verschiedene Verfahren zur Ermittlung des Interpolationspolynoms $p_{n-1}(x)$. Wir betrachten nur das **Interpolationspolynom von Newton**

Wir definieren die

ersten Steigungen durch $[\,x_k x_l\,] = \dfrac{f(x_k) - f(x_l)}{x_k - x_l}$,

zweiten Steigungen durch $[\,x_k x_l x_m\,] = \dfrac{[\,x_k x_l\,] - [\,x_l x_m\,]}{x_k - x_m}$,

...

(n-1)-ste Steigung durch $[\,x_1 x_2 \dots x_n\,] = \dfrac{[\,x_1 x_2 \dots x_{n-1}\,] - [\,x_2 \dots x_{n-1} x_n\,]}{x_1 - x_n}$

und betrachten das **Steigungsschema**

x_i	$f(x_i)$	1. Steigungen	2. Steigungen	3. Steigungen	4. Steigung
x_1	$f(x_1)$				
		$[\,x_1x_2\,]$			
x_2	$f(x_2)$		$[\,x_1x_2x_3\,]$		
		$[\,x_2x_3\,]$		$[\,x_1x_2x_3x_4\,]$	
x_3	$f(x_3)$		$[\,x_2x_3x_4\,]$		$[\,x_1x_2x_3x_4x_5\,]$
		$[\,x_3x_4\,]$		$[\,x_2x_3x_4x_5\,]$	
x_4	$f(x_4)$		$[\,x_3x_4x_5\,]$		
		$[\,x_4x_5\,]$			
x_5	$f(x_5)$				
$\vdots$					

Das **Polynom**

$$\begin{aligned} p^N_{n-1}(x) &= f(x_1) + [\,x_1x_2\,](x-x_1) + [\,x_1x_2x_3\,](x-x_1)\,(x-x_2) + \dots \\ &+ [\,x_1x_2\dots x_n\,](x-x_1)\,(x-x_2)\dots\,(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

heißt **Newtonsches Interpolationspolynom**.

Wir setzen $f(x) \approx p^N_{n-1}(x)$. Dann gilt $f(x_i) = p^N_{n-1}(x_i) \quad (i = 1, \dots, n)$.

Vorteil des Newtonschen Interpolationspolynoms: Wird ein weiterer **Interpolationsknoten** hinzugefügt, so erhöht sich der Rechenaufwand nur unwesentlich.

Beispiel 3.9 *Gegeben:* $(1,1), (2,2), (3,3), (0,-3)$. *Gesucht:* $p_3(x)$.

Konstruktion des **Newtonschen Interpolationspolynoms**

x_i	$f(x_i)$	*1. Steigungen*	*2. Steigungen*	*3. Steigung*
1	1			
		1		
2	2		0	
		1		1/2
3	3		−1/2	
		2		
0	−3			

$$p^N_3(x) = 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)\,(x-2)\,(x-3) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{13}{2}x - 3.$$

3.3.2 Gebrochen rationale Funktionen

Definition 3.9 (Gebrochen rationale Funktion, Pole)

1. *Der Quotient zweier* **ganzer rationaler Funktionen**, *in welchem Zähler- und Nennerpolynom* **teilerfremd** *sind, (d.h. die* **Polynome** *besitzen* **keine gemeinsamen NS**), *heißt* **gebrochen rationale Funktion**.

$$f(x) = \frac{p_m(x)}{p_n(x)} = \frac{b_m\, x^m + b_{m-1}\, x^{m-1} + \ldots + b_1\, x + b_0}{a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0} \tag{3.4}$$

   mit $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, p_n(x) \neq 0\}$ *und* $a_i, b_j \in \mathbb{R} \quad (i = 0, \ldots, n;\ j = 0, \ldots, m)$.

2. *Eine* **gebrochen rationale Funktion** $f(x)$ *heißt* **echt (unecht gebrochen)**, *wenn* $m < n$ $(m \geq n)$ *ist. Die Zahl* $\max(m, n)$ *heißt* **Grad** *von* $f(x)$.

3. *Besitzt* $p_n(x)$ *an der Stelle* x_0 *eine* **reelle NS der Vielfachheit** k, *so heißt* x_0 *ein* **Pol** k**-ter Ordnung** *der* **gebrochen rationalen Funktion** $f(x)$.

Beispiel 3.10 (Gebrochen rationale Funktionen)

(1) $\tilde{f}(x) = \dfrac{(x-1)\,(x-2)}{(x+2)\,(x-2)} \qquad D(\tilde{f}) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq \pm 2\}.$

Besitzen Zähler- und Nennerpolynom **gemeinsame NS**, *so werden sie durch* **teilerfremde Polynome** *ersetzt:*

$f(x) = \dfrac{(x-1)}{(x+2)} \qquad D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq -2\}.$

(2) $f(x) = x^{-n} \quad D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad n \in \mathbb{N},$

$f(x) = x^{-2m} \quad m \in \mathbb{N}$ *ist eine* **gerade Funktion**,

$f(x) = x^{-(2m+1)} \quad m \in \mathbb{N}_0$ *ist eine* **ungerade Funktion**.

(3) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \quad D(f) = \mathbb{R}.$

Die Funktion $f(x)$ *ist beschränkt mit* $c = 1$, *denn*

$$\frac{1}{1+x^2} \leq 1 \Longleftrightarrow 1 \leq 1 + x^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Eigenschaften gebrochen rationaler Funktionen

Jede **unecht gebrochene rationale Funktion** lässt sich mittels Partialdivision in eine Summe, bestehend aus einem **Polynom** und einem **echt gebrochenen rationalen** Anteil, zerlegen:

$$f(x) = p_{m-n}(x) + \frac{q(x)}{p_n(x)} \quad D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, p_n(x) \neq 0\},$$

wobei $p_{m-n}(x)$ $(q(x))$ ein **Polynom** $(m-n)$**-ten (höchstens** $(n-1)$**-ten Grades)** ist.

Beispiel 3.11 *Betrachtet man eine quadratische Kostenfunktion der Form* $y = p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ *mit den Mengeneinheiten* x *des Produktes und den Kostenanteilen* y*, so ist die* **Stückkostenfunktion**

$$y = f(x) = \frac{a_2x^2 + a_1x + a_0}{x} = a_2x + a_1 + \frac{a_0}{x} \qquad (x \neq 0)$$

eine **unecht gebrochene rationale Funktion** *mit* $m = 2$ *und* $n = 1$*.*

Definition 3.10 **Asymptoten** *einer* **gebrochen rationalen Funktion** $f(x)$ *heißen*

1. *die zur* y*-Achse parallelen Geraden* $x = x_i$*, wenn* x_i **reelle NS** *des Nennerpolynoms* $p_n(x)$ *sind,*
2. *Kurven, denen sich der Graph von* $f(x)$ *bei immer größer werdender Entfernung vom Koordinatenursprung unbegrenzt nähert, speziell*
   - *die zur* x*-Achse parallele Gerade* $y = \frac{b_m}{a_n}$*, falls* $m = n$ *gilt,*
   - *der Graph des* **Polynoms** $p_{m-n}(x)$*, falls* $m > n$ *gilt,*
   - *die* x*-Achse, falls* $m < n$ *gilt.*

Beispiel 3.12 $f(x) = \dfrac{b_1x + b_0}{a_1x + a_0} \quad D(f) = \mathbb{R}\backslash\{-\dfrac{a_0}{a_1}\}$
Diese Funktion heißt auch **gebrochen lineare Funktion***.*

Ihre **Asymptoten** *sind* $x = -\dfrac{a_0}{a_1}$ *und* $y = \dfrac{b_1}{a_1}$*.*

3.4 Nichtrationale Funktionen

3.4.1 Wurzelfunktionen

Potenzfunktionen der Gestalt $f(x) = x^r$ sind in folgenden Fällen definiert:

	Basis	Exponent	Funktion
1°	$x \in \mathbb{R}$	$r \in \mathbb{N}_0$	ganze rationale Funktion (Polynom)
2°	$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0$	$r = -n,\ n \in \mathbb{N}$	gebrochen rationale Funktion
3°	$x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0$	$r \in \mathbb{Q} \wedge r \geq 0$	nichtrationale Funktion (Wurzelfunktion)
4°	$x \in \mathbb{R} \wedge x > 0$	$r \in \mathbb{Q}$	nichtrationale Funktion (Wurzelfunktion)
5°	$x \in \mathbb{R} \wedge x > 0$	$r \in \mathbb{R}$	transzendente Funktion

Beispiel 3.13 (Nichtrationale Funktionen)

(1) $f_1(x) = x^{-1/2} \quad D(f_1) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$
$f_1^{-1}(x) = x^{-2} \quad D^*(f_1^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$
Die Funktion $f_1(x)$ *ist vom Typ* $4°$*, ihre Umkehrfunktion* $f_1^{-1}(x)$ *vom Typ* $2°$*.*

(2) $f_2(x) = x^{3/2} \quad D(f_2) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$
$f_2^{-1}(x) = x^{2/3} \quad D^*(f_2^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$
Die Funktion $f_2(x)$ ist vom Typ 3°, ihre Umkehrfunktion $f_2^{-1}(x)$ ebenfalls.
Die Funktion $y = f(x) = x^{3/2}$ heißt **semikubische** *oder* **Neil'sche Parabel**.

(3) $f_3(x) = -x^{3/2} \quad D(f_3) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$
$f_3^{-1}(x) = (-x)^{2/3} \quad D^*(f_3^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0\}$
Die Funktion $f_3(x)$ ist vom Typ 3°, ihre Umkehrfunktion $f_3^{-1}(x)$ ebenfalls.

(4) $f_4(x) = x^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2}\ln x) = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\ln x} \quad D(f_4) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$
$f_4^{-1}(x) = x^{1/\sqrt{2}} \quad D^*(f_4^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$
Die Funktion $f_4(x)$ ist vom Typ 5°, ihre Umkehrfunktion $f_4^{-1}(x)$ ebenfalls.

(5) In der Ökonomie nennt man Funktionen der Gestalt

$$f(x) = a\,x^b \qquad D(f) = [0, +\infty[\qquad a > 0 \wedge b \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

Cobb-Douglas-Funktionen, *die wie folgt interpretiert werden:*

1° *Für $b > 1$ beschreibt (3.5)* **überproportionales** *oder* **progressives Wachstum**.

2° *Für $b = 1$ beschreibt (3.5)* **proportionales Wachstum** *mit dem* **Proportionalitätsfaktor** *a.*

3° *Für $0 < b < 1$ beschreibt (3.5)* **unterproportionales** *oder* **degressives Wachstum**.

4° *Für $b < 0$ beschreibt (3.5) z.B. eine* **Preis-Absatz-Beziehung**, *wenn x den Preis und $f(x)$ die preisabhängige Nachfrage bezeichnet.*

3.4.2 Transzendente Funktionen

- **Exponential- und Logarithmusfunktionen**

Die **Logarithmusfunktionen** sind die **Umkehrfunktionen** zu den **Exponentialfunktionen**.

Definition 3.11 *Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0 \wedge a \neq 1$. Dann heißt*

$$f(x) = a^x \quad D(f) = \mathbb{R}_x \qquad (f^{-1}(x) = \log_a x \quad D^*(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\})$$

Exponentialfunktion *mit der Basis a* (**Logarithmusfunktion** *zur Basis a*).

Alle Funktionen der Form

$$y = a^x \qquad (y = \log_a x) \quad (a \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad a > 0 \wedge a \neq 1)$$

schneiden sich im Punkt $(0,1)$ $((1,0))$ der Ebene. Weiter gilt: $\log_a 1 = 0$ und $\log_a a = 1$.

Rechenregeln für Exponential- und Logarithmusfunktionen

1° $a^x\, a^y = a^{x+y} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$,

2° $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$,

3° $(a^x)^y = a^{x\,y} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$,

4° $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \qquad \forall$ **positive** $x, y \in \mathbb{R}$,

5° $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \qquad \forall$ **positive** $x, y \in \mathbb{R}$,

6° $\log_a x^p = p\, \log_a x \qquad \forall$ **positive** $x, y \in \mathbb{R} \wedge \forall p \in \mathbb{R}$,

7° $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$.
Diese Beziehung heißt Kettenregel für Logarithmen und liefert einen Zusammenhang zwischen verschiedenen Logarithmensystemen. Dabei heißt der Umrechnungsfaktor $\log_a b$ **Modul** des Logarithmensystems zur Basis a.

Wichtige Logarithmensysteme

Basis	Exponentialf.	Logarithmusf.	Bezeichnung des Logarithmus
$a = \mathrm{e}$	$y = \mathrm{e}^x$	$y = \log_{\mathrm{e}} x = \ln x$	natürlicher Logarithmus
$a = 10$	$y = 10^x$	$y = \log_{10} x = \lg x$	dekadischer Logarithmus
$a = 2$	$y = 2^x$	$y = \log_2 x = \mathrm{ld}\, x$	dyadischer Logarithmus

Die Zahl e, die so genannte **Eulersche Zahl**, ist durch folgenden Grenzwert definiert:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\ldots.$$

Beispiel 3.14 *Der Verbrauch an bestimmten Lebensmitteln in Abhängigkeit vom Einkommen wird oft durch die Funktion* $f(x) = a \exp\left(-\dfrac{b}{x}\right) \quad x \geq 0$ *beschrieben, wobei die Konstanten* a *und* b *aus Umfrageergebnissen ermittelt werden.*

- **Trigonometrische und Arkusfunktionen**

  Wir betrachten drei **trigonometrische Funktionen**

  1. $f_1(x) = \sin x \quad D(f_1) = \mathbb{R}_x$,
     $W(f_1) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq y \leq 1\}$,
     Menge der **NS**: $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$,
  2. $f_2(x) = \cos x \quad D(f_2) = \mathbb{R}_x$,
     $W(f_2) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq y \leq 1\}$,
     Menge der **NS**: $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\}$,
  3. $f_3(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad D(f_3) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\}$,
     $W(f_3) = \mathbb{R}_y$,
     Menge der **NS**: $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$,
     Menge der **Pole**: $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.

Für die Funktionen $f_1,\ f_2,\ f_3$ existieren in Intervallen, in denen sie **streng monoton** sind, **Umkehrfunktionen**.

1. $g_1(x) = \sin x \quad D(g_1) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$,
   $W(g_1) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq y \leq 1\}$,

   $g_1^{-1}(x) = \arcsin x \quad D^*(g_1^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq x \leq 1\}$,
   $W^*(g_1^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$,
2. $g_2(x) = \cos x \quad D(g_2) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq \pi\}$,
   $W(g_2) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq y \leq 1\}$,

   $g_2^{-1}(x) = \arccos x \quad D^*(g_2^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq x \leq 1\}$,
   $W^*(g_2^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq y \leq \pi\}$,
3. $g_3(x) = \tan x \quad D(g_3) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$,
   $W(g_3) = \mathbb{R}_y$,

   $g_3^{-1}(x) = \arctan x \quad D^*(g_3^{-1}) = \mathbb{R}_x$,
   $W^*(g_3^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$.

Betrachtet man ein anderes Monotonie-Intervall für die Funktionen $f_i(x)$ $(i = 1,2,3)$, so erhält man einen anderen **Wertebereich** für die **Umkehrfunktionen**. Die oben angegebenen **Wertebereiche** für $g_i^{-1}(x)$ $(i = 1,2,3)$ heißen **Hauptwertebereiche** dieser Funktionen. Ein Wert aus dem **Hauptwertebereich** heißt **Hauptwert** der entsprechenden **Umkehrfunktionen** $g_i^{-1}(x)$ $(i = 1,2,3)$. **Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen** auf Monotonie-Intervallen heißen **Arkusfunktionen** oder **zyklometrische Funktionen**.

Bei der Berechnung **trigonometrischer Funktionen** mit dem Taschenrechner ist darauf zu achten, ob der Winkel in **Gradmaß** oder in **Bogenmaß** gegeben ist.

Die **trigonometrischen Funktionen** bilden die Grundlage zur Beschreibung von periodischen Vorgängen (Schwingungsprozessen).

Beispiel 3.15 *Wir betrachten die Funktionen*

$y = f(x) = a\ \sin(b(x+c)) + d = a\ \sin(bx+\varphi)) + d$ *mit dem Phasenwinkel* $\varphi = bc$.

Die Amplitude a gibt an, um wieviel die Funktionswerte von f im Vergleich zur Sinusfunktion vergrößert ($|a| > 1$) bzw. verkleinert ($|a| < 1$) worden sind.

Die Kreisfrequenz b liefert die Anzahl der Schwingungen in 2π Zeiteinheiten.

Die Phasenverschiebung $\frac{\varphi}{b} = c$ zeigt an, um wieviel der Graph der Funktion $f(x)$ gegenüber dem Graphen von $\sin(b\,x)$ verschoben ist und zwar nach links, wenn c positiv und nach rechts, wenn c negativ ist.

Die Verschiebung d längs der y-Achse gibt an, um vieviel der Graph der Funktion $y = a\ \sin(b(x+c))$ nach oben, falls $d > 0$, bzw. nach unten, falls $d < 0$, verschoben worden ist.

Es gibt noch andere Klassen **transzendenter Funktionen**.

3.5 Grenzwerte von Funktionen

Definition 3.12 (GW, einseitige GW)

1. *Die Funktion* $y = f(x)$ *sei wenigstens in* $]\,a, c\,[\,\cup\,]\,c, b\,[$ *definiert. Wenn für* **jede** *Folge* (x_n) *mit den Eigenschaften*

   1° $x_n \in]\,a, c\,[\,\cup\,]\,c, b\,[\quad \forall\, n,$

   2° $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$

   die Folge $(f(x_n))$ *der zugehörigen Funktionswerte gegen* **ein und denselben** *Wert* $A \in \mathbb{R}$ *konvergiert, dann heißt* A *der* **GW** *von* $f(x)$ *für* $x \to c$.

   $$\textit{Bezeichnung: } \lim_{x\to c} f(x) = A$$

2. *Ersetzt man die Bedingung* 1° *durch*

   $1^\circ_l \quad x_n \in]\,a, c\,[\quad \forall\, n \qquad (1^\circ_r \quad x_n \in]\,c, b\,[\quad \forall\, n),$

   d.h. es werden nur Folgen (x_n) *mit* $x_n < c$ $\;(x_n > c)$ *zugelassen, so spricht man von einem* **linksseitigen (rechtsseitigen) GW**.

   $$\textit{Bezeichnungen: } \textbf{linksseitiger GW } \lim_{x\to c-0} f(x) = A_-$$
   $$\textbf{rechtsseitiger GW } \lim_{x\to c+0} f(x) = A_+$$

Theorem 3.4 *Die Funktion* $f(x)$ *besitzt an der Stelle* c *den* **GW** A *gdw an der Stelle* c *der* **linksseitige GW** A_- *sowie der* **rechtsseitige GW** A_+ *existieren und* $A_- = A_+$ *gilt. Ist die letzte Bedingung erfüllt, so gilt*

$$A = A_- = A_+.$$

Die Definition 3.12 kann auf folgende Fälle erweitert werden:

a) $A = -\infty, \quad A = +\infty, \qquad \lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty,$

b) $c = -\infty, \quad c = +\infty, \qquad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A, \quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A,$

c) $c = \pm\infty, \quad A = \pm\infty, \qquad \lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = +\infty.$

Beispiel 3.16 (GW von Funktionen)

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+1}{4x-5} = \dfrac{3}{4}$

(2) $\lim\limits_{x\to 2} = \dfrac{x^2-4}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{4}{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

3.6 Stetigkeit einer Funktion

Von **stetigen Vorgängen** sprechen wir, wenn sich der betrachtete Prozess in kleinen Intervallen bez. der unabhängigen Variablen wenig ändert. Nicht alle Vorgänge besitzen diese Eigenschaft.

Beispiel 3.17 *Es seien*

$$\begin{array}{rcl} Q & - & \textit{die Nachfrage (in ME) bez. eines Produktes pro Zeiteinheit,} \\ T_0, 2T_0, \ldots & - & \textit{die Bestellzeitpunkte,} \\ z & - & \textit{die Bestellmenge (in ME) für das Produkt } P. \end{array}$$

Ein anfänglicher Lagerbestand z führt nach Ablauf der Zeit $T_0 = \dfrac{z}{Q}$ zu einem Nullbestand des Lagers und erneuter Auffüllung mit dem Bestand z. Der aktuelle Lagerbestand $L(t)$ in ME ist dann eine Funktion der Zeit t, die sogenannte **Sägezahnkurve***.*

$$y = L(t) = \begin{cases} z - Qt & \textit{für} \quad 0 \le t < T_0 \\ z - Q(t - T_0) & \textit{für} \quad T_0 \le t < 2T_0 \\ z - Q(t - 2T_0) & \textit{für} \quad 2T_0 \le t < 3T_0 \\ \vdots & \end{cases} .$$

Definition 3.13 (Stetigkeit, Unstetigkeit)

1. *Eine Funktion $y = f(x) \quad x \in D(f)$ heißt an der Stelle c* **stetig** *gdw*

   1° $c \in D(f)$,

   2° $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ *als* **eigentlicher GW** *existiert, d.h.* $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A \quad A \in \mathbb{R}$,

   3° $A = f(c)$.

2. *Eine Funktion $y = f(x)$ heißt an der Stelle c* **unstetig** *gdw wenigstens eine der Bedingungen $1^\circ - 3^\circ$ verletzt ist.*

Wichtige Typen von Unstetigkeitsstellen für Funktionen einer Variablen

I **Hebbare Unstetigkeitsstellen (Lücken)**

I.1 $c \notin D(f) \qquad \lim\limits_{x \to c} f(x) = A \qquad A \in \mathbb{R}$

Bildung einer stetigen Ersatzfunktion möglich:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad x \in D(f) \\ A & \text{für} \quad x = c \end{cases} \qquad \text{mit} \quad D(\tilde{f}) = D(f) \cup \{c\}.$$

Beispiel 3.18 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \quad D(f) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{für} \quad x \in D(f) \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases} \qquad \text{mit} \quad \mathrm{D}(\tilde{\mathrm{f}}) = \mathrm{D}(\mathrm{f}) \cup \{0\} = \mathbb{R}$$

I.2 $c \in D(f) \qquad \lim_{x \to c} f(x) = A \qquad A \in \mathbb{R}, \quad \text{aber} \quad f(c) \neq A$

Bildung einer stetigen Ersatzfunktion möglich:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad x \in D(f) \backslash \{c\} \\ A & \text{für} \quad x = c \end{cases} \qquad \text{mit} \quad D(\hat{f}) = D(f).$$

Beispiel 3.19 $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}$

$$\hat{f}(x) = |x| \qquad D(\hat{f}) = \mathbb{R}$$

II **Sprungstellen**

II.1 $c \notin D(f) \qquad \lim_{x \to c-0} f(x) = A_- \wedge \lim_{x \to c+0} f(x) = A_+ \qquad A_-, A_+ \in \mathbb{R} \wedge A_- \neq A_+$

Beispiel 3.20 $f(x) = \dfrac{|x|}{x} \qquad D(f) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

II.2 $c \in D(f) \qquad \lim_{x \to c-0} f(x) = A_- \wedge \lim_{x \to c+0} f(x) = A_+ \qquad A_-, A_+ \in \mathbb{R} \wedge A_- \neq A_+$

Beispiel 3.21 $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -1 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}$

III **Polstellen**

$c \notin D(f) \qquad \lim_{x \to c-0} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x \to c+0} f(x) = \pm\infty$

Beispiel 3.22 $f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad D(f) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

Definition 3.14 *Eine Funktion* $y = f(x) \quad x \in D(f)$ *heißt an der Stelle* c **linksseitig (rechtsseitig) stetig** *gdw*

$\hat{1}$ $c \in D(f)$,

$\hat{2}$ $\lim_{x \to c-0} f(x) \qquad (\lim_{x \to c+0} f(x))$ *als* **einseitiger eigentlicher GW** *existiert, d.h.*

$\lim_{x \to c-0} f(x) = A_- \quad A_- \in \mathbb{R} \qquad (\lim_{x \to c+0} f(x) = A_+ \quad A_+ \in \mathbb{R})$,

$\hat{3}$ $A_- = f(c) \qquad (A_+ = f(c))$.

Theorem 3.5 *Die Funktion* $f(x)$ *ist an der Stelle* c **stetig** *gdw* $f(x)$ *an der Stelle* c **links- und rechtsseitig stetig** *ist.*

Ist die letzte Bedingung erfüllt, so gilt $f(c) = A_- = A_+$.

Beispiel 3.23 (Einseitige Stetigkeit)

(1) Die **Heaviside-Funktion**

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

ist an der Stelle $c = 0$ **rechtsseitig stetig**, *denn* $A_- = 0$ *und* $A_+ = 1 = f(0)$.

(2) Die Funktion $f(x) = \operatorname{sgn} x \quad D(f) = \mathbb{R}$ *ist an der Stelle* $x = 0$ *weder* **links-** *noch* **rechtsseitig stetig**, *denn* $A_- \neq f(0)$, $A_+ \neq f(0)$ *und* $A_- \neq A_+$.

3.7 Differenzialrechnung

3.7.1 Der Ableitungsbegriff

Ausgangspunkt war das **Tangentenproblem** (Leibniz 1646-1716). Gegeben sei $y = f(x) \quad D(f)$, $c \in D(f)$. Gesucht ist die **Tangente** an den durch f gegebenen Graphen im Punkt $(c, f(c))$.

Definition 3.15 (Differenzenquotient, Differenzialquotient, Differenzial, Tangente)

1. *Sei* $y = f(x)$ *in* $U_\delta(c)$ *definiert, d.h.* $]\, c - \delta, c + \delta\, [\subseteq D(f)$. *Wählen* $\Delta x \in \mathbb{R}$ *derart, dass* $0 < |\Delta x| < \delta$ *gilt. Der Anstieg der Sekante durch die Punkte* $(c, f(c))$ *und* $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$ *(mittlerer Anstieg der Kurve im Intervall* $[c, c + \Delta x]$*) heißt* **Differenzenquotient**.

$$\textit{Bezeichnung: } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

2. *Die Funktion* f *heißt* **differenzierbar** *an der Stelle* c *(oder in* c*) gdw gilt:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \quad \textit{bzw.}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c) - f'(c)\Delta x}{\Delta x} = 0.$$

Der **(eigentliche) GW** $f'(c)$ *heißt* **1. Ableitung** *oder* **Differenzialquotient** *von* f *an der Stelle* c. *Der* **Differenzialquotient** *ist also kein Quotient im üblichen Sinne, sondern ein* **GW**.

3. *Das Produkt* $f'(c)\,\Delta x := \mathrm{d}f(c, \Delta x) = \mathrm{d}f$ *heißt das zur Stelle* c *und zum Argumentzuwachs* Δx *gehörige* **Differenzial** *der Funktion* f. *Speziell ergibt sich für* $f(x) = x \quad \mathrm{d}f = \mathrm{d}x$ *und andererseits* $\mathrm{d}f = 1 \cdot \Delta x$, *also* $\Delta x = \mathrm{d}x$. *Allgemein gilt dann* $\mathrm{d}f = f'(c)\,\mathrm{d}x$ *und für* $\mathrm{d}x \neq 0$ *erhält man die* **Ableitung** *von* f *an einer Stelle* c *als den* **Quotienten** *zweier* **Differenziale**:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}_{/x=c} = f'(c).$$

4. *Die Funktion f sei in c* **differenzierbar**. *Dann heißt die durch $y = f(c)+f'(c)(x-c)$ gegebene Gerade* **Tangente** *an die durch f gegebene Kurve im Punkt $(c, f(c))$. Die Zahl $f'(c) = \tan\alpha$ heißt* **Anstieg der Tangente**, *der Winkel $\alpha = \arctan f'(c)$ heißt* **Anstiegswinkel**.

Beispiel 3.24 $y = f(x) = x^3 \quad D(f) = \mathbb{R}$

$$f'(c) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(c+\Delta x)^3 - c^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{3c^2\,\Delta x + 3c\,\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = 3c^2$$

Wir berechnen die **Tangentengleichung** *in zwei verschiedenen Punkten:*

1° $(c, f(c)) = (0,0)$, $\quad f'(0) = 0 \qquad$ **Tangentengleichung** *in* $(0,0)$*:* $y = 0$,

2° $(c, f(c)) = (1,1)$, $\quad f'(1) = 3 \qquad$ **Tangentengleichung** *in* $(1,1)$*:* $y = 3x - 2$.
Die **Tangente** *an die Kurve im Punkt* $(1,1)$ *schneidet die Kurve noch im Punkt* $(-2,-8)$.

Durch die **Ableitung** $f'(c)$ wird die Momentanveränderung oder das Grenzverhalten der Funktion f in c beschrieben. In der Ökonomie sind deshalb auch folgende Bezeichnungen gebräuchlich:

f:	Produktfunktion	f':	Grenzproduktivität
f:	Gewinnfunktion	f':	Grenzgewinn(funktion)
f:	Kostenfunktion	f':	Grenzkosten(funktion)
f:	Ertragsfunktion	f':	Grenzertrags(funktion).

Definition 3.16 *Die Funktion f heißt* **linksseitig (rechtsseitig) differenzierbar** *an der Stelle c gdw*

$$\lim_{\Delta x\to -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to -0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \qquad \left(\lim_{\Delta x\to +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to +0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \right)$$

als **einseitiger eigentlicher GW** *existiert. Dieser* **GW** *heißt* **linksseitige (rechtsseitige) Ableitung** *von f an der Stelle c.*

Bezeichnung: $$\lim_{\Delta x\to -0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'_l(c) \qquad \left(\lim_{\Delta x\to +0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'_r(c) \right).$$

Theorem 3.6 *Die Funktion f besitzt eine* **Ableitung** *$f'(c)$ in c gdw f in c die* **einseitigen Ableitungen** *$f'_l(c)$ sowie $f'_r(c)$ besitzt und wenn $f'_l(c) = f'_r(c)$ gilt.*

Beispiel 3.25 *Die Funktion $f(x) = |x| \quad D(f) = \mathbb{R}$ ist in $c = 0$* **nicht differenzierbar**, *denn*

$$\begin{aligned} f'_l(0) &= \lim_{\Delta x\to -0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \\ f'_r(0) &= \lim_{\Delta x\to +0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to +0} \frac{+\Delta x}{\Delta x} = +1, \end{aligned}$$

also $f'_l(0) \neq f'_r(0)$. Nach Theorem 3.6 existiert $f'(0)$ nicht. Folglich ist f in $c = 0$ **nicht differenzierbar** *und in diesem Punkt existiert* **keine Tangente** *an die Kurve. Es existieren jedoch die beiden* **einseitigen Tangenten** *$y = x$ und $y = -x$.*

Definition 3.17 (Uneigentliche Ableitungen)

1. *Der* **uneigentliche GW**
$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \pm\infty$$
heißt **uneigentliche Ableitung** *von f an der Stelle c.*

2. *Der* **uneigentliche GW**
$$\begin{array}{rcccl} f_l'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} & = & \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} & = & \pm\infty \\ \Bigg(f_r'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} & = & \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} & = & \pm\infty \Bigg) \end{array}$$
heißt **linksseitige (rechtsseitige) uneigentliche Ableitung** *von f in c.*

3. *Ist $f_l'(c) = f_r'(c) = -\infty \quad (f_l'(c) = f_r'(c) = +\infty)$, dann besitzt f an der Stelle c eine* **uneigentliche Ableitung** $f'(c) = -\infty \quad (f'(c) = +\infty)$. *In diesem Falle spricht man aber nicht von* **Differenzierbarkeit** *der Funktion f an der Stelle c.*

Beispiel 3.26 *Die Funktion* $y = f(x) = \begin{cases} x^{1/3} & \text{für } x \geq 0 \\ -(-x)^{1/3} & \text{für } x < 0 \end{cases}$ *besitzt an der Stelle $c = 0$ eine* **uneigentliche Ableitung**, *denn*
$$\begin{aligned} f_l'(0) &= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-(-\Delta x)^{1/3}}{-(-\Delta x)} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{(-\Delta x)^{2/3}} = +\infty \\ f_r'(0) &= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{(\Delta x)^{1/3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} = +\infty. \end{aligned}$$
Die **Tangente** *an die durch f gegebene Kurve im Punkt $(0,0)$ hat die Gleichung $x = 0$.*

Theorem 3.7 *Ist f* **differenzierbar** *in c, so ist f auch* **stetig** *in c.*

Die Umkehrung von Theorem 3.7 gilt i. Allg. nicht (vgl. Beispiel 3.25).

Differenziationsregeln und die **Ableitungen elementarer Funktionen** sind in jeder Formelsammlung bzw. auf dem Arbeitsblatt zur Vorlesung aufgelistet. Wir geben noch eine Regel für die **logarithmische Differenziation** an: Für Funktionen der Gestalt $y(x) = u(x)^{v(x)},\ u(x) > 0$ gilt:
$$y'(x) = y(x)\left[v'(x)\,\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

3.7.2 Ableitungen höherer Ordnung

Ist $f'(x)$ in X_1 **differenzierbar** (d.h., f in jedem Punkt der Menge X_1 **differenzierbar**), so kann man die 2. **Ableitung** oder die **Ableitung** 2. **Ordnung** bilden:
$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Analog erhält man die n**-te Ableitung** oder die **Ableitung** n**-ter Ordnung**:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Man schreibt: $f^{(0)}(x) = f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{(4)}(x),\ f^{(5)}(x), \ldots$.

Regeln zur Berechnung von Ableitungen höherer Ordnung

Die Funktionen f und g mögen in X_1 **Ableitungen** n**-ter Ordnung** besitzen.

1° $(cf(x))^{(n)} = cf^{(n)}(x)$,

2° $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$,

3° $(f(x)\,g(x))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$ (**Leibnizsche Formel**).

Dabei ist unter Verwendung von $k! = 1 \cdot 2 \ldots k, \quad k \in \mathbb{N}$ und $0! = 1$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} & \text{für } \ k < n,\ n \in \mathbb{Q},\ k \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{für } \ k = 0 \vee k = n. \end{cases}$$

Beispiel 3.27 (Ableitungen höherer Ordnung)

(1) $f(x) = \mathrm{e}^x \qquad f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$,

$f(x) = a^x \qquad f^{(n)}(x) = a^x\,(\ln a)^n$.

(2) Gegeben: $h(x) = \mathrm{e}^x \cos x$. *Gesucht:* $h^{(4)}(x)$. *Wir setzen:* $f(x) = \mathrm{e}^x$ *und* $g(x) = \cos x$. *Aus der* **Leibnizschen Formel** *ergibt sich für* $n = 4$*:*

$$\begin{aligned} h^{(4)} &= \binom{4}{0} f\,g^{(4)} + \binom{4}{1} f'\,g''' + \binom{4}{2} f''\,g'' + \binom{4}{3} f'''\,g' + \binom{4}{4} f^{(4)}\,g, \\ h^{(4)}(x) &= -4\mathrm{e}^x\,\cos x. \end{aligned}$$

Physikalische Bedeutung der 2. Ableitung

Für $s = s(t) \quad t \in [t_1, t_2]$ ist $v(t) = \dot{s}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$ die **Geschwindigkeit** als Funktion der Zeit t.

Für $v = v(t) \quad t \in [t_1, t_2]$ ist $a(t) = \ddot{s}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\dot{s}(t + \Delta t) - \dot{s}(t)}{\Delta t}$ die **Beschleunigung** als Funktion der Zeit t.

3.8 Anwendungen der Differenzialrechung

3.8.1 Approximation von Funktionen

Theorem 3.8 (Satz von Taylor) *Sei*

$\hat{1}$ f *definiert und* n**-fach stetig differenzierbar** *in* $[a, b]$,

$\hat{2}$ *es existiere eine* **eigentliche (endliche) Ableitung** $f^{(n+1)}(x)$ *in* $]\,a, b\,[$.

Dann gilt für beliebige Punkte $x, x_0 \in [a, b]$ *die* **Taylorsche Formel**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!} + R_n(x, x_0), \tag{3.6}$$

d.h., eine Darstellung von $f(x)$ *durch ein Polynom in* $(x - x_0)$ *und ein Restglied* $R_n(x, x_0)$. *Das Restglied in der Form*

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad 0 < \theta < 1 \tag{3.7}$$

ist nach **Lagrange** *benannt. Es gibt noch andere Darstellungen des Restgliedes.*

Speziell für $x_0 = 0$ geht (3.6) über in die **Mac Laurinsche Formel**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + R_n(x), \tag{3.8}$$

d.h., eine Darstellung von $f(x)$ durch ein Polynom in x und ein Restglied $R_n(x)$. Das Restglied

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta\, x)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \qquad 0 < \theta < 1 \tag{3.9}$$

ist hier wieder in der Form von **Lagrange** angegeben.

Beispiel 3.28 *Gesucht ist ein* **Polynom** 4. **Grades** *in* x *als Näherungsfunktion für die* **Exponentialfunktion** $f(x) = \mathrm{e}^x$ *im Intervall* $[0, 1]$.

Die Formeln (3.8) und (3.9) liefern

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{4} \frac{\mathrm{e}^0\, x^k}{k!} + R_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{5!}\, x^5.$$

Da e^x *eine* **streng monoton wachsende** *Funktion ist, wird das Restglied am größten, wenn* θx *nach oben durch* 1 *abgeschätzt und* x *durch* 1 *ersetzt wird. Man erhält*

$$|R_4(1)| \le \frac{\mathrm{e}^1}{5!} \cdot 1^5 < \frac{3}{5!} = 0.025,$$

d.h., der mittels $p_4(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}$ *errechnete Näherungswert für* e^x *ist im Intervall* $[0, 1]$ *mindestens auf eine Stelle hinter dem Komma genau.*

3.8.2 Elastizitätsbetrachtungen

Definition 3.18 *Der Ausdruck*

$$\varepsilon_f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

heißt **Elastizität** *der Funktion* $y = f(x)$. *Eine ökonomische Funktion* $f(x)$ *heißt*

- **elastisch** *(im Punkt x), wenn* $|\varepsilon_f(x)| > 1$,
- **proportionalelastisch** *(im Punkt x), wenn* $|\varepsilon_f(x)| = 1$,
- **unelastisch** *(im Punkt x), wenn* $|\varepsilon_f(x)| < 1$ *gilt.*

Ist p der **Preis** und $f(p)$ eine **Preis-Absatz-Funktion**, so bezeichnet $\varepsilon_f(p)$ die **Preiselastizität der Nachfrage in Bezug auf den Preis** oder die **Absatzelastizität**. Sie gibt, grob gesprochen, an, um wieviel Prozent sich die Nachfrage nach dem Erzeugnis ändert, wenn sich der Preis um 1 % ändert.

Beispiel 3.29 *Für die* **Preis-Absatz-Funktion** $f(p) = -\frac{1}{10}p + 50 \quad p \in [0, 500]$ *erhält man* $\varepsilon_f(p) = f'(p) \cdot \frac{p}{f(p)} = \frac{p}{p - 500}$. *Für* $p = 250 \quad (\varepsilon_f(p) = -1)$ *ergibt sich* **Proportionalelastizität**, *für* $p < 250 \quad (-1 < \varepsilon_f(p) < 0)$ *ist* $f(p)$ **unelastisch** *und für* $p > 250 \quad (\varepsilon_f(p) < -1)$ *ist* $f(p)$ **elastisch**. *So verursacht bei* $p = 400$ *eine Preiserhöhung um* 1% *bereits eine Nachfrageminderung um* 4% $(\varepsilon_f(p) = -4.0)$. *Je höher also in diesem Beispiel der Preis, desto stärker wirkt sich eine weitere Preisänderung direkt auf die Nachfrage aus.*

3.8.3 Die Regeln von de l'Hospital

Unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ (dies sind Symbole, keine Rechengrößen) lassen sich oft mit Hilfe der **de l'Hospital'schen Regeln** untersuchen. Das Symbol 0^∞ stellt keinen unbestimmten Ausdruck dar.

1. Regel: Sie dient zur Grenzwertbestimmung in unbestimmten Ausdrücken der Form $\frac{0}{0}$, d.h., es gilt $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$.

Wenn eine Zahl $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in]\, c - \delta, c\, [\,\cup\,]\, c, c + \delta\, [$ gilt:

1° $g(x) \neq 0$,

2° $f'(x), g'(x)$ existieren und $g'(x) \neq 0$ gilt,

dann ist

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ als **eigentlicher** oder **uneigentlicher GW** existiert.

2. Regel: Sie dient zur Grenzwertbestimmung in unbestimmten Ausdrücken der Form $\frac{\infty}{\infty}$, d.h., es gilt $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$.

Wenn eine Zahl $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in]\, c - \delta, c\, [\,\cup\,]\, c, c + \delta\, [$ die Bedingung 2° aus der **1. Regel** gilt, dann ist

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ als **eigentlicher** oder **uneigentlicher GW** existiert.

Umformungen für die übrigen unbestimmten Ausdrücke

(I) $0\cdot\infty$, d.h. es gilt $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ und $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$:

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

(II) $\infty-\infty$, d.h. es gilt $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$:

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}.$$

(III) $0^0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty$, d.h. wir betrachten den **GW** $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)}\quad f(x)>0\ \forall\ x\in D(f)$. Aus $y(x)=f(x)^{g(x)}$ folgt $\ln y(x)=g(x)\ln f(x)$. Gilt

$$\lim_{x\to c}\ln y(x)=\left\{\begin{array}{c} A\\ +\infty\\ -\infty\end{array}\right.,\quad \text{so ist}\quad \lim_{x\to c} y(x)=\lim_{x\to c}\mathrm{e}^{\ln y(x)}=\mathrm{e}^{\left(\lim\limits_{x\to c}\ln y(x)\right)}=\left\{\begin{array}{c}\mathrm{e}^A\\ +\infty\\ 0\end{array}\right..$$

3.9 Untersuchung reeller Funktionen mit Hilfe von Ableitungen

3.9.1 Monotonieverhalten

Zur Definition der Monotonie einer Funktion einer reellen Variablen vgl. Definition 3.4.

Aus $f'(x)=\tan\alpha>0\quad\forall x\in]a,b[$ folgt: Der Anstieg der **Tangente** an den Graphen von f ist positiv.

Aus $f'(x)=\tan\alpha<0\quad\forall x\in]a,b[$ folgt: Der Anstieg der **Tangente** an den Graphen von f ist negativ.

Für **differenzierbare** Funktionen kann man die **Monotonie** auch durch die **Ableitungen** der Funktion charakterisieren.

Theorem 3.9 *Sei*

1° f *definiert und* **stetig** *in* $[a,b]$,

2° f **differenzierbar** *in* $]a,b[$.

Dann gilt:

(1) $f'(x)=0\quad\forall x\in]a,b[\iff f(x)=K\quad\forall x\in[a,b]$, *wobei* K *eine Konstante ist,*

(2) $f'(x)-g'(x)=0\quad\forall x\in]a,b[\iff f(x)-g(x)=K\quad\forall x\in[a,b]$,

(3) $f'(x)\geq 0\ (f'(x)\leq 0)\quad\forall x\in]a,b[\iff f$ **monoton wachsend (monoton fallend)** *in* $[a,b]$,

(4) $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ $\forall\, x \in]\,a, b\,[\implies f$ **streng monoton wachsend (streng monoton fallend)** *in* $[a, b]$.

Beispiel 3.30 $f(x) = x^3$ *ist* **streng monoton wachsend** *in* $[-1, 1]$, *aber* $f'(0) = 0$, *d.h. die Umkehrung von Behauptung (4) in Theorem 3.9 gilt i. Allg. nicht.*

3.9.2 Extrema

Definition 3.19 *Sei* $y = f(x)$ *definiert in* $[a, b]$ *und* $c \in [a, b]$.

1. *Die Funktion* $y = f(x)$ *besitzt in* c *ein* **relatives** *oder* **lokales Minimum (Maximum)** $f(c)$ *gdw eine Umgebung* $U_\delta(c) \subset [a, b]$ *existiert, so dass gilt:*

$$f(x) \geq f(c) \qquad (f(x) \leq f(c)) \qquad \forall\, x \in U_\delta(c)$$

Falls c *einer der Randpunkte* a *oder* b *ist, versteht man unter* $U_\delta(c)$ *eine einseitige Umgebung von* c. **Lokale Minima** *bzw.* **Maxima** *heißem* **lokale Extrema** *von* f. *Falls für alle* $x \in U_\delta(c) \backslash \{c\}$ *eine strenge Ungleichung vorliegt, so spricht man von einem* **eigentlichen lokalen Extremum**.

2. *Die Funktion* $y = f(x)$ *besitzt an der Stelle* c_m (c_M) *ein* **absolutes** *oder* **globales Minimum (Maximum)** $f(c_m)$ $(f(c_M))$ *gdw*

$$f(x) \geq f(c_m) \qquad (f(x) \leq f(c_M)) \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

Dabei heißen $f(c_m)$ *und* $f(c_M)$ *die* **globalen Extrema** *von* f *auf* $[a, b]$.

3. $f(c)$ *heißt* **inneres (globales oder lokales) Extremum**, *wenn* $f(c)$ *ein* **lokales oder globales Extremum** *und* $c \in]a, b[$ *ist.*

4. $f(c)$ *heißt* **Randextremum**, *wenn* $f(c)$ *ein* **Extremum** *ist und* $c = a$ *oder* $c = b$.

Jedes **globale Extremum** ist gleichzeitig ein **lokales**, die Umkehrung gilt jedoch nicht. Ist die Funktion $y = f(x)$ $x \in [a, b]$ hinreichend oft differenzierbar, so lassen sich **innere lokale Extrema** mit Hilfe der Differenzialrechnung ermitteln. Durch Vergleich dieser **Extrema** mit den Randwerten $f(a)$ und $f(b)$ ergibt sich dann eine Aussage über die **globalen Extrema** von $f(x)$ auf $[a, b]$.

Notwendiges Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremums:

Theorem 3.10 (Satz von Fermat) *Sei* f **differenzierbar** *in* $]\,a, b\,[$ *und* f *besitze in* $c \in]\,a, b\,[$ *ein* **inneres lokales Extremum** $f(c)$. *Dann gilt* $f'(c) = 0$.

An der Stelle eines **inneren lokalen Extremums** besitzt der Graph der Funktion $y = f(x)$ eine Tangente parallel zur x-Achse. Ein Punkt c, für den $f'(c) = 0$ gilt, heißt **stationärer** oder **extremwertverdächtiger Punkt**.

Beispiel 3.31 $f(x) = x^3$ $\quad x \in]-1, 1\,[$ *und* $f'(0) = 0$, *aber* $f(0)$ *ist* **kein Extremum**, *d.h. der* **Satz von Fermat** *ist* **nicht hinreichend** *für die Existenz eines* **lokalen Extremums**.

Hinreichende Kriterien für die Existenz eines lokalen EW:

1. Regel: Sie ist sowohl für **differenzierbare** als auch für **nicht differenzierbare** Funktionen anwendbar.

1° Sei f definiert und **stetig** in $U_\delta(c) =]\, c-\delta, c+\delta\, [$,

2° f besitze in $]\, c-\delta, c\, [\, \cup\,]\, c, c+\delta\, [$ eine **endliche Ableitung**,

3° in c gelte entweder $f'(c) = 0$ oder f ist in c **nicht differenzierbar**,

4° f' wechselt in keinem der Intervalle $]\, c-\delta, c\, [$ und $]\, c, c+\delta\, [$ das Vorzeichen.

Dann verhält sich $f(x)$ an der Stelle c wie folgt:

	Vorzeichen von $f'(x)$ für		$f(x)$ besitzt an der Stelle c
	$x < c$	$x > c$	
I	$+$	$+$	kein Extremum
II	$+$	$-$	ein lokales Maximum
III	$-$	$+$	ein lokales Minimum
IV	$-$	$-$	kein Extremum.

2. Regel: Sie ist nur für **n-fach stetig differenzierbare Funktionen** anwendbar.

1° Sei f **n-fach stetig differenzierbar** in $U_\delta(c) \quad (n \geq 2)$.

2° Es gelte: $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0 \wedge f^{(n)}(c) \neq 0$.

Ist n **ungerade**, so besitzt f an der Stelle c **kein Extremum**. Ist n **gerade**, so hat f in c ein **eigentliches inneres lokales Extremum** und zwar für $f^{(n)}(c) > 0$ ein **lokales Minimum** und für $f^{(n)}(c) < 0$ ein **lokales Maximum** (vgl. **Taylorsche Formel**).

Spezialfall: Sei f **zweifach stetig differenzierbar** in $U_\delta(c)$, $f'(c) = 0 \wedge f''(c) \neq 0$. Dann besitzt f an der Stelle c ein **eigentliches inneres lokales Extremum** und zwar für $f''(c) > 0$ ein **lokales Minimum** und für $f''(c) < 0$ ein **lokales Maximum**.

Beispiel 3.32 $f(x) = |x| \quad U_\delta(0) =]-\delta, \delta[\quad f'_l(0) = -1, \quad f'_r(0) = +1$ *(vgl. Beispiel (3.25)) Die Funktion $f(x)$ ist in $c = 0$* **nicht differenzierbar**. *Nach der* **1. Regel** *liegt in $c = 0$ ein* **lokales Minimum** *vor, welches gleichzeitig das* **globale Minimum** *ist.*

3.9.3 Krümmungsverhalten

Definition 3.20 *Die Funktion $f(x)$ heißt auf $[a, b]$* **konvex (konkav)***, wenn für alle x_1, $x_2 \in [a, b]$ und jedes $\alpha \in]0, 1[$ die Ungleichung*

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \overset{(\geq)}{\leq} \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \tag{3.10}$$

erfüllt ist. Lässt man in (3.10) für $x_1 \neq x_2$ das Gleichheitszeichen nicht zu, so heißt $f(x)$ auf $[a, b]$ **streng konvex (streng konkav)**.

Geometrische Interpretation

Aus $x_1,\, x_2 \in [a,b], \quad x_1 < x_2, \quad \alpha \in]\,0,1\,[, \quad x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in]\,x_1, x_2\,[$ folgt

$$\alpha = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}.$$

Die rechte Seite von (3.10) stellt die Gleichung der Sekante durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ dar, denn

$$\begin{aligned} \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) &= f(x_2) + \alpha(f(x_1) - f(x_2)) \\ &= f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2) \\ &\Longrightarrow f_s(x) := f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2). \end{aligned}$$

Wegen $f(x) = f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$ bedeutet (3.10): $f(x) \overset{(\geq)}{\leq} f_s(x)$, d.h., im Falle der **Konvexität (Konkavität)** liegt der Graph der Funktion **unter (über)** der Sekante durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$.

Für **differenzierbare** Funktionen kann man die **Konvexität (Konkavität)** auch durch die **Ableitungen** der Funktion charakterisieren.

Theorem 3.11 *Sei* f **differenzierbar** *in* $[a,b]$.

$f(x)$ **[streng] konvex (konkav)** *in* $[a,b] \iff f'(x)$ *ist in* $[a,b]$ **[streng] monoton wachsend (fallend)**.

Theorem 3.12 *Sei*

1° f' *definiert und* **stetig** *in* $[a,b]$,

2° f' **differenzierbar** *in* $]\,a,b\,[$,

Dann gilt (vgl. Theorem 3.9 (3) und(4)):

(1) $f''(x) \geq 0 \;\; (f''(x) \leq 0) \quad \forall x \in]\,a,b\,[\iff f$ **konvex (konkav)** *in* $[a,b]$,

(2) $f''(x) > 0 \;\; (f''(x) < 0) \quad \forall x \in]\,a,b\,[\Longrightarrow f$ **streng konvex (streng konkav)** *in* $[a,b]$.

Beispiel 3.33 $f(x) = x \ln x \quad x \in]\,0,10\,[, \qquad f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0 \quad \forall\, x \in]\,0,10\,[\Longrightarrow f$ **streng konvex** *in* $[0,10]$.

3.9.4 Wendepunkte (WP)

Definition 3.21 *Sei* f **differenzierbar** *in* $]\,a,b\,[$. *Der Punkt* $(c, f(c))$ *heißt* **WP** *des durch* f *gegebenen Graphen, wenn* f' *in* c *ein* **lokales Extremum** *besitzt. Die* **Tangente** *im* **WP** *heißt* **Wendetangente**. *Ist diese parallel zur* x*-Achse* (*d.h.* $f'(c) = 0$), *so heißt* $(c, f(c))$ **Horizontalwendepunkt** *oder* **Stufenpunkt**.

Geometrische Interpretation

In einem **WP** ändert f das **Krümmungsverhalten** von **streng konvex** in **streng konkav** oder umgekehrt.

Notwendiges Kriterium für die Existenz eines WP:

Sei f **zweifach differenzierbar** in $]\,a, b\,[$ und $(c, f(c))$ sei ein **WP** des durch f gegebenen Graphen. Dann gilt $f''(c) = 0$.

Beispiel 3.34 $f(x) = x^4 \quad x \in]-1, 1\,[$ *und* $f''(0) = 0$, *aber* $(0, f(0))$ *ist* **kein WP**.

Hinreichende Kriterien für die Existenz eines WP:

1. Regel:

1° Sei f **zweifach differenzierbar** in $U_\delta(c) =]\,c - \delta, c + \delta\,[$,

2° $f''(c) = 0$,

3° es gelte: $f''(x) < 0$ (bzw. $f''(x) > 0$) $\forall\, x \in]\,c - \delta, c\,[\;\wedge\; f''(x) > 0$ (bzw. $f''(x) < 0$) $\forall\, x \in]\,c, c + \delta\,[$.

Dann ist $(c, f(c))$ ein **WP** des durch f gegebenen Graphen.

2. Regel:

1° Sei f n**-fach stetig differenzierbar** in $U_\delta(c) \quad (n \geq 3)$.

2° Es gelte: $f''(c) = f'''(c) = \ldots f^{(n-1)}(c) = 0 \wedge f^{(n)}(c) \neq 0$.

Ist n **ungerade**, so ist $(c, f(c))$ ein **WP** des durch f gegebenen Graphen. Ist n **gerade**, so besitzt f an der Stelle c ein **eigentliches inneres lokales Extremum** (vgl. **2. Regel** für **Extrema**).

Spezialfall: Sei f **dreifach stetig differenzierbar** in $U_\delta(c)$, $f''(c) = 0 \wedge f'''(c) \neq 0$. Dann ist $(c, f(c))$ ein **WP** des durch f gegebenen Graphen.

Beispiel 3.35 $f(x) = x^5 \quad x \in]-1, 1\,[, \qquad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$, *aber* $f^{(5)}(0) \neq 0$, *d.h.* $(0, f(0))$ *ist ein* **Horizontalwendepunkt**.

3.10 Integralrechnung

3.10.1 Das unbestimmte Integral

In den Anwendungen tritt oft folgende Problemstellung auf: Gegeben ist die Geschwindigkeit $v = v(t)$, gesucht ist das zugehörige Bewegungsgesetz $s = s(t)$. Dies führt auf die Umkehrung der **Differenziation**.

Definition 3.22 *Die Funktionen f, F seien definiert in X, F sei* **differenzierbar** *in X. Gilt*

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in X,$$

so heißt F eine **Stammfunktion** *von f im Intervall X.*

Die **Stammfunktion** ist **nicht eindeutig** bestimmt.

Beispiel 3.36 *Sei $f(x) = 2x$. Dann ist $F(x) = x^2 + C$ für jedes $C \in \mathbb{R}$ eine* **Stammfunktion** *von $f(x)$. Durch Festlegung eines Punktes $(x_0, F(x_0))$ in der Ebene lässt sich die Konstante C* **eindeutig** *bestimmen.*

Theorem 3.13 *Jede in X* **stetige** *Funktion $f(x)$ besitzt in X eine* **stetige Stammfunktion** *$F(x)$.*

Definition 3.23 *Die Gesamtheit aller* **Stammfunktionen** *$F(x) + C$ der Funktion $f(x)$ heißt* **unbestimmtes Integral** *der Funktion $f(x)$ in X.*

$$\text{Bezeichnung: } \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Das Aufsuchen einer **Stammfunktion** kann als Umkehrung der **Differenziation** aufgefasst werden. Man erhält aus den **Differenziationsregeln** mittels $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ Regeln für die **unbestimmte Integration (Grundintegrale)** (vgl. Formelblatt).

Grundregeln zur Berechnung unbestimmter Integrale

1° Die Funktion f besitze eine **Stammfunktion** in X. Dann gilt

$$\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

2° Die Funktionen f, g mögen eine **Stammfunktion** in X besitzen. Dann gilt

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3° Die Funktionen f, g seien **stetig differenzierbar** in X, g sei eine beliebige **Stammfunktion** von g'. Dann gilt

$$\int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{Partielle Integration}.$$

4° Die Funktion $f(x)$ besitze eine **Stammfunktion** $F(x)$ in X, $g(t)$ sei **stetig differenzierbar** in X_1, $W(g) \subseteq X$. Dann ist $F(g(t))$ eine **Stammfunktion** von $f(g(t))\,g'(t)$ und es gilt mit der Substitutionsfunktion $x = g(t)$

$$\int f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{Variablensubstitution}.$$

5° Die Funktion g sei **stetig differenzierbar** in X. Dann gilt

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|g(x)| + C.$$

Beispiel 3.37 (Unbestimmte Integrale)

(1) $\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$

(2) $\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = e^x \dfrac{\cos x + \sin x}{2} + C$

(3) $\int \sin^3 t \cos t \, \mathrm{d}t = \dfrac{\sin^4 t}{4} + C$

(4) $\int \dfrac{\cos x}{\sin x} \, \mathrm{d}x = \ln |\sin x| + C$

3.10.2 Das bestimmte Integral

Ausgangspunkt ist das **geometrische Problem** der Bestimmung des **Flächeninhaltes geometrischer Figuren**.

Spezialfall: Sei $y = f(x) = c > 0 \quad x \in [a, b] \quad a < b$ gegeben. Wir betrachten die ebene Punktmenge

$$A = \{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq c\}.$$

Dann ist

$$P(A) = c\,(b - a)$$

der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen c und $(b - a)$.

Allgemeiner Fall: Sei $y = f(x) > 0 \quad x \in [a, b] \quad a < b$ gegeben, wobei $f(x)$ **stetig** ist. Wir betrachten die Punktmenge

$$B = \{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Man erhält eine Näherung für den Flächeninhalt der Punktmenge B durch Zerlegung der Figur in Rechtecke.

Zu diesem Zwecke betrachten wir eine Zerlegung $\mathcal{Z}_n$ des Intervalls $[a, b]$ durch $n + 1$ Teilpunkte

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

in genau n Teilintervalle $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ der Länge $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Im i -ten Teilintervall wird die Fläche unter dem Graphen von f durch ein Rechteck der Breite Δx_i und der Höhe $f(\xi_i)$ approximiert, wobei ξ_i ein beliebiger Punkt aus dem Teilintervall I_i ist.

Der Flächeninhalt der Gesamtfläche unter der Kurve beträgt näherungsweise

$$P(\mathcal{Z}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i, \tag{3.11}$$

wobei die Näherungssumme den Flächeninhalt der n Rechtecke darstellt. Sie heißt **Riemannsche Integralsumme** und hängt ab von der gewählten Zerlegung $\mathcal{Z}_n$, d.h. von der Intervallunterteilung und von der Auswahl der Zwischenpunkte ξ_i. Bei fixierter Zerlegung $\mathcal{Z}_n$ bezeichnen wir die größte der Intervall-Längen Δx_i mit $\delta(\mathcal{Z}_n)$, d.h. $\delta(\mathcal{Z}_n) = \max\limits_i \Delta x_i$ und nennen diese Zahl **Feinheitsmaß** der Zerlegung. Vergrößern wir jetzt die Anzahl der Teilungspunkte im Intervall $[a, b]$, derart, dass das **Feinheitsmaß** $\delta(\mathcal{Z}_n)$ gegen Null strebt, so ist für eine **stetige** Funktion $f(x)$ zu vermuten, dass sich die Summe (3.11) dem Flächeninhalt $P(B)$ der Punktmenge B unbegrenzt nähert.

Definition 3.24 *Existiert für die oben beschriebene Konstruktion ein* **GW**, *der weder von der Zerlegung $\mathcal{Z}_n$ noch von der Wahl der Punkte ξ_i abhängt, so heißt dieser* **bestimmtes (Riemannsches) Integral** *von f über $[a, b]$:*

$$\lim_{\delta(\mathcal{Z}_n)\to 0} P(\mathcal{Z}_n) = \lim_{\delta(\mathcal{Z}_n)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dabei nennt man $f(x)$ **Integrand** *und a bzw. b die* **untere** *bzw.* **obere Integrationsgrenze**. *Die Funktion f selbst heißt dann in $[a, b]$* **Riemann-integrierbar** *($f \in \mathcal{R}[a, b]$).*

Klassen integrierbarer Funktionen

1. f in $[a, b]$ **stetig** $\Longrightarrow$ $f \in \mathcal{R}[a, b]$.
2. f in $[a, b]$ **beschränkt** und besitze dort höchstens endlich viele Sprungstellen $\Longrightarrow$ $f \in \mathcal{R}[a, b]$.
3. f in $[a, b]$ **beschränkt** und **monoton** $\Longrightarrow$ $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Beispiel 3.38 $y = \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rational} \\ 0 & \text{für } x \text{ irrational} \end{cases} \qquad D(\chi) = [0, 1]$

$W(\chi) = \{0, 1\}$, *d.h. χ ist* **beschränkt**, *aber $\chi \notin \mathcal{R}[a, b]$.*

Eigenschaften des bestimmten Integrals

Seien $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Dann existieren auch die anderen aufgeführten Integrale und es gilt:

1° $\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\,\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2° $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad a \le c \le b$

3° $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

4° $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

5° Gilt $f(x) \le g(x) \quad (f(x) < g(x)) \quad \forall x \in [a,b], \quad a < b$, so folgt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

6° Aus $f \in \mathcal{R}[a,b]$ folgt $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ und für $a < b$ gilt:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

7° Gilt $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b], \quad a < b$, so folgt

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

Die Definition 3.24 ist nicht zur praktischen Berechnung bestimmter Integrale geeignet. Sie liefert jedoch die Grundlage zur numerischen Integration. Praktisch werden bestimmte Integrale durch Rückführung auf unbestimmte Integrale berechnet. Als Bindeglied dazu dient das **bestimmte Integral** mit **variabler oberer Integrationsgrenze**: Aus Eigenschaft 2° **bestimmter Integrale** folgt: $f \in \mathcal{R}[a,b] \Longrightarrow f \in \mathcal{R}[a,x] \quad \forall x \in [a,b]$. Ersetzt man in $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ die obere Integrationsgrenze b durch die Variable x, so erhält man eine Funktion der variablen oberen Integrationsgrenze x:

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad D(\phi) = [a,b] \quad \phi(a) = 0 \quad \phi(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.12}$$

Um Verwechslungen auszuschließen, ist es sinnvoll, die Integrationsvariable mit einem anderen Buchstaben zu bezeichnen. Dies hat keinen Einfluss auf den Wert des Integrals.

Eigenschaften des Integrals (3.12)

- $f \in \mathcal{R}[a,b] \quad \Longrightarrow \quad \phi$ **stetig** in $[a,b]$.
- f **stetig** in $[a,b] \quad \Longrightarrow \quad \phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ist eine **Stammfunktion** von f in $[a,b]$, d.h. ϕ ist **differenzierbar** in $[a,b]$ und es gilt $\phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$, d.h., jede **Stammfunktion** lässt sich als **bestimmes Integral** mit **variabler oberer Integrationsgrenze** darstellen.

Theorem 3.14 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung) *Ist f* **stetig** *in $[a,b]$ und F irgendeine* **Stammfunktion** *von f, so gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad \textbf{Newton-Leibniz'sche Formel}.$$

Erweiterung des Flächeninhaltsbegriffs

Der Flächeninhalt ebener Punktmengen ist für im Intervall $[a, b],\ (a < b)$ **stetige** Funktionen $f(x)$ mit $f(x) > 0$ wohldefiniert. Bezeichnet man mit $P(B)$ den Flächeninhalt der von der Kurve $y = f(x)$ und den Geraden $y = 0, \quad x = a, \quad x = b$ begrenzten Punktmenge B, so gilt

$$P(B) = \left| \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \right| = \begin{cases} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, & \text{falls} \quad f(x) > 0 \land a < b, \\ -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, & \text{falls} \quad f(x) > 0 \land a > b, \\ -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, & \text{falls} \quad f(x) < 0 \land a < b, \\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, & \text{falls} \quad f(x) < 0 \land a > b. \end{cases}$$

Beispiel 3.39 (Bestimmtes Integral, Flächeninhalt)

(1) Berechnen Sie das **bestimmte Integral** $J = \int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$.

$$J = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = (-1) - (-1) = 0.$$

(2) Berechnen Sie den Flächeninhalt $P(B)$ der ebenen Punktmenge, die begrenzt wird durch $y = f(x) = \sin x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2\pi$.

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) = \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2 - (-2) = 4.$$

Partielle Integration im bestimmten Integral

Die Funktionen f, g seien **stetig differenzierbar** in $[a, b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel 3.40 $J = \int_0^{\pi} x \sin x\,\mathrm{d}x$.

$\int_0^{\pi} x \sin x\,\mathrm{d}x = \pi + \int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = \pi.$

Variablensubstitution im bestimmten Integral

Sei $x = g(t)$ **stetig differenzierbar** in $[a', b']$, $f(x)$ **stetig** in $W(g)$ und es gelte $W(g) \subseteq D(f) = [a, b]$. Dann gilt mit der Substitutionsfunktion $x = g(t)$

$$\int_{a'}^{b'} f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(a')}^{g(b')} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad g(a') = a \quad g(b') = b \quad D(g) = [a', b'].$$

Beispiel 3.41 $J = \int\limits_0^{\pi/2} e^{\sin t} \cos t \, \mathrm{d}t$

1. Lösungsweg: *Substitution des Integranden, Berechnung irgendeiner Stammfunktion, Rücksubstitution, Einsetzen der ursprünglichen Grenzen*

$x = g(t) = \sin t \qquad \mathrm{d}x = g'(t)\mathrm{d}t = \cos t \, \mathrm{d}t$

$\int e^{\sin t} \cos t \, \mathrm{d}t = \int e^x \, \mathrm{d}x = e^x = e^{\sin t}$

$J = \int\limits_0^{\pi/2} e^{\sin t} \cos t \, \mathrm{d}t = e^{\sin \frac{\pi}{2}} - e^0 = e - 1.$

2. Lösungsweg: *Substitution des Integranden und der Grenzen, Berechnung des bestimmten Integrals in den neuen Grenzen*

$x = g(t) = \sin t \qquad a' = 0, \quad b' = \frac{\pi}{2} \qquad g(a') = g(0) = 0, \quad g(b') = g(\frac{\pi}{2}) = 1.$

$J = \int\limits_0^{\pi/2} e^{\sin t} \cos t \, \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 e^x \, \mathrm{d}x = e^1 - e^0 = e - 1.$

3.10.3 Uneigentliche Integrale

Das **bestimmte (Riemannsche) Integral** wurde unter zwei Voraussetzungen betrachtet:

1° Das Integrationsintervall $[a, b]$ ist **beschränkt**.

2° Der Integrand $f(x)$ ist eine **beschränkte** Funktion.

Sind 1° und 2° erfüllt, so spricht man von **eigentlichen Integralen**, d.h. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ besitzt einen endlichen Wert. Ist wenigstens eine dieser Bedingungen verletzt, dann spricht man von **uneigentlichen Integralen**. Diese werden als **GW eigentlicher Integrale** erklärt. Es ergeben sich zwei Typen **uneigentlicher Integrale**.

I. Uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integrationsintervall

Wir unterscheiden folgende Fälle:

$\int\limits_a^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x =$	$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x =$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x =$
$\lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_a^A f(x) \, \mathrm{d}x$	$\lim\limits_{B \to -\infty} \int\limits_B^b f(x) \, \mathrm{d}x$	$\lim\limits_{\substack{A \to +\infty \\ B \to -\infty}} \int\limits_B^A f(x) \, \mathrm{d}x.$

Definition 3.25 *Ist eine* **Stammfunktion** F *von* f *bekannt, so gilt*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^A f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} [F(x)]_a^A = \lim_{A \to +\infty} F(A) - F(a),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{B\to-\infty}\int\limits_{B}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{B\to-\infty}[F(x)]_B^b \;=\; F(b)-\lim_{B\to-\infty}F(B),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\substack{A\to+\infty\\B\to-\infty}}\int\limits_{B}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\substack{A\to+\infty\\B\to-\infty}}[F(x)]_B^A \;=\; \lim_{A\to+\infty}F(A)-\lim_{B\to-\infty}F(B).$$

Im letzten Fall sind die Grenzübergänge unabhängig voneinander. Wenn die **GW** *in den rechten Seiten dieser Beziehungen als* **eigentliche GW** *existieren, so sagt man, dass die* **uneigentlichen Integrale** *in den linken Seiten* **existieren** *oder* **konvergieren**. *Wenn die* **GW** *in den rechten Seiten* **uneigentlich** *sind oder* **nicht existieren**, *so sagt man, die* **uneigentlichen Integrale** *in den linken Seiten* **existieren nicht** *oder* **divergieren**.

Für $f(x) > 0$ berechnen wir also den Flächeninhalt der Punktmenge, die von oben durch den Graphen der Funktion $y = f(x)$ und von unten durch die x-Achse auf einem unbeschränkten Intervall begrenzt wird.

Wenn eine **Stammfunktion** in der Klasse der **elementaren Funktionen** nicht angegeben werden kann, so sind Konvergenzkriterien anzuwenden (siehe z.B. [1]).

Beispiel 3.42 (Uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integrationsintervall)

(1) Sei $\alpha > 0 \land \alpha \neq 1$.

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{1}^{A}\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty}\frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \textit{für} \quad \alpha>1 \quad \textit{Konvergenz}\\ +\infty & \textit{für} \quad 0<\alpha<1 \quad \textit{Divergenz}\end{cases}$$

(2) $$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{1}^{A}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}[\ln|x|]_1^A = \lim_{A\to+\infty}\ln|A| - 0 = +\infty \qquad \textit{Divergenz}$$

(3) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{A\to+\infty\\B\to-\infty}}\int\limits_{B}^{A}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{A\to+\infty\\B\to-\infty}}[\arctan x]_B^A$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\arctan A - \lim_{B\to-\infty}\arctan B = \pi \qquad \textit{Konvergenz}$$

(4) Wird in einem Stromkreis mit der Selbstinduktion L *und dem Widerstand* R *im Moment* $t = 0$ *ein Strom der Stärke* I_0 *ausgeschaltet, so tritt ein Ausschaltstrom* $I = I_0\exp(-\frac{R}{L}t)$ *auf. Die gesamte Joulesche Wärme ergibt sich zu* $Q = \int\limits_0^{+\infty} I^2 R\,\mathrm{d}t =$

$$R\,I_0^2\int\limits_0^{+\infty}\exp(-\frac{2R}{L}t)\,\mathrm{d}t = R\,I_0^2\lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A}\exp(-\frac{2R}{L}t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{L\,I_0^2}{2}\lim_{A\to+\infty}\left[\exp(-\frac{2R}{L}t)\right]_0^A = -\frac{L\,I_0^2}{2}\left[\lim_{A\to+\infty}\exp(-\frac{2R}{L}A)-1\right] = \frac{L\,I_0^2}{2}.$$

II. Uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integranden

Wir unterscheiden folgende Fälle:

$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$	$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$	$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$
$\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$	$\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$	$\lim\limits_{\varepsilon_1\to+0}\int\limits_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim\limits_{\varepsilon_2\to+0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Definition 3.26 *Ist eine* **Stammfunktion** F *von* f *bekannt, so gilt*

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to+0}[F(x)]_{a+\varepsilon}^{b} = F(b) - \lim_{\varepsilon\to+0} F(a+\varepsilon),\\
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to+0}[F(x)]_{a}^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} F(b-\varepsilon) - F(a),\\
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{\varepsilon_1\to+0}[F(x)]_{a}^{c-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to+0}[F(x)]_{c+\varepsilon_2}^{b}\\
&= \lim_{\varepsilon_1\to+0} F(c-\varepsilon_1) - F(a) + F(b) - \lim_{\varepsilon_2\to+0} F(c+\varepsilon_2)
\end{aligned}$$

Die Grenzübergänge $\varepsilon_1 \to +0$ und $\varepsilon_2 \to +0$ sind unabhängig voneinander. **Konvergenz** *und* **Divergenz** *der Integrale ist erklärt wie in Definition 3.25.*

Beispiel 3.43 (Uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integranden)

(1) Sei $\alpha > 0 \wedge \alpha \neq 1.$

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{0+\varepsilon}^{1} = \frac{1}{1-\alpha} - \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \textit{für}\quad 0<\alpha<1 \quad \textit{Konvergenz}\\ +\infty & \textit{für}\quad \alpha>1 \quad \textit{Divergenz}\end{cases}
\end{aligned}$$

(2) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}[\ln|x|]_{0+\varepsilon}^{1} = 0 - \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\ln|0+\varepsilon| = +\infty$ *Divergenz*

(3) $\int\limits_{-4}^{4}\frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \infty$ *Divergenz*