

WIINF1, WIINE1, WIINM1, WIIMT1
Ergänzungskurs Elementarmathematik
Leiterin: HSD Dr. Sybille Handrock
Übungsleiter: Michael Pippig
Aufgabenblatt 3
Wintersemester 2005/2006

Das Rechnen mit Beträgen

Wiederholung der Rechengesetze

$$\begin{aligned}
 |a| &= \max\{a, -a\} \\
 -|a| &\leq a \leq |a| \\
 |a - b| &= |b - a| \\
 |a| \leq b &\iff -b \leq a \leq b \\
 |a| \geq b &\iff a \geq b \vee a \leq -b \\
 |a \cdot b| &= |a| \cdot |b| \\
 ||a| - |b|| &\leq |a + b| \leq |a| + |b|.
 \end{aligned}$$

1. Für welche reellen x gilt:

a) $|x - 2| < 1$ b) $|x + 1| \geq 4$, c) $|2x + 1| = |x + 1| + 1$, d) $\ln|x + 4| > 1$?

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen:

a) $|x - 2| < |x - 3|$, b) $3 < |x + 2| \leq 5$, c) $|x + 2| + |x - 2| \leq 12$,

d) $||x - 1| + x| + |x| < 3$, e) $|x + 2| - |x| > 1$, f) $||x + 1| - |x - 1|| < 1$.

3. Ermitteln Sie die Lösungsmenge L folgender Ungleichungen und Ungleichungssysteme in zwei Variablen und stellen Sie L in einem xy -Koordinatensystem grafisch dar:

a) $(2x + y)(y - x + 1) \geq 0$, b) $x - 2 > 2$, $x + y < 4$, c) $\frac{(x - 1)(y + 2)}{y - x} < 0$,

d) $(x + a)^2 + (y + b)^2 \geq r^2$, e) $|x - y|^2 + |x + y|^2 \leq 1$, f) $\frac{|x - 1|}{|y + 1|} \leq 1$.

4. Stellen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $y = 2|x - 1| - |x - 2|$ grafisch dar.

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

1. Formen Sie die folgenden Ausdrücke derart um, dass keine negativen Exponenten mehr auftreten:

a) $\left(\frac{v^{-4}x^2}{u^{-6}y^{-4}}\right)^2 : \left(\frac{x^{-1}y^{-2}}{u^4v^{-3}}\right)^3$, b) $\left[\left(\frac{1}{5^{-3}}\right)^{-2}\right]^{-3}$, c) $\left[\left(\frac{x^{-3}y^{-2}}{z^{-3}}\right)^4\right]^{-2}$.

2. Vereinfachen Sie:

$$a) \frac{x+y}{z} \sqrt[3]{\frac{z^4 - z^3x}{x^2 + 2xy + y^2}}, \quad b) \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a^4 - b^4}} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}, \quad c) \frac{\sqrt[3]{a^4b} \cdot \sqrt[3]{a^2b^7} \cdot \sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2b^5}},$$

$$d) \sqrt[3]{a^2 \sqrt{a} \sqrt[4]{a^3}}, \quad e) \sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt{\sqrt[6]{x^2}} \cdot \sqrt[12]{x^7}, \quad f) \sqrt{\frac{a}{b} \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}}}.$$

3. Formen Sie die folgenden Ausdrücke derart um, dass der Nenner ein rationaler Ausdruck wird

$$a) \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{3}}{3\sqrt{3} - \sqrt{5}}, \quad b) \frac{4\sqrt{5} - \sqrt{30}}{\sqrt{12} + 5\sqrt{2}}, \quad c) \frac{1}{2 - \sqrt{2} + \sqrt{3}},$$

$$d) \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}}, \quad e) \frac{4 + 2\sqrt{10}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}, \quad f) \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

4. Formen Sie die Logarithmenausdrücke um bzw. bestimmen Sie x :

$$a) \log_k \sqrt[m]{k}, \quad b) \log_y y^{-n}, \quad c) \ln e^{-3}, \quad d) \log_x \frac{1}{u} = -1, \quad e) \log_4 x = \frac{1}{2}.$$

5. Fassen Sie mit Hilfe der Logarithmengesetze zusammen:

$$a) \log_a u + \log_a v - \log_a w, \quad b) x \ln u + y \ln v, \quad c) \frac{1}{3} \log_k a - \frac{1}{5} \log_k b + \frac{2}{3} \log_k c.$$

Lösung von Wurzel-, Exponential- und Logarithmengleichungen

1. Lösen Sie folgende Gleichungen:

$$a) \sqrt{5x-4} = 1 + \sqrt{3x+1}, \quad b) \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = \frac{x+1}{\sqrt{x+2}},$$

$$c) \sqrt{x+2} - \sqrt{x+4} + \sqrt{x+3} = 0, \quad d) 4\sqrt[3]{6x-1} + 5 = 0,$$

$$e) e^{x^2-2\sqrt{x^2}} - e^{-1} = 0, \quad f) 10^{2x} - 101 \cdot 10^x + 100 = 0,$$

$$g) \lg(x^2 + 10x - 4) - \lg x - 1 = 0, \quad h) \frac{\lg(35 - x^3)}{\lg(5 - x)} = 3.$$

2. Lösen Sie die folgenden Formeln nach der angegebenen Variablen auf:

$$a) Kq^n - \frac{q^n - 1}{q - 1} = 0 \quad \text{nach } n, \quad b) Kq^n + (x - 2)q^{-n} - c^2 = 0 \quad \text{nach } q.$$

3. Lösen Sie die biquadratischen Gleichungen

$$a) x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad (L = \{\pm 1, \pm 2\}), \quad b) 10x^4 - x^2 - 21 = 0 \quad (L = \{\pm 1.22\}).$$