HSD Dr. S. Handrock
Fakultät für Mathematik
TU Chemnitz

Arbeitsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II (Teil 3)

Das Nabla-Kalkül

1. Produkte des Nabla-Operators mit einem Skalarfeld bzw. Vektorfeld

Voraussetzung: Alle betrachteten Funktionen seien **zweifach stetig differenzierbar** im betrachteten Bereich.

Definition 1: Seien (x, y, z) die kartesischen Koordinaten eines Punktes $P \in \mathbb{R}^3$. Der Differentialoperator

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

heißt **Nabla-Operator (Vektorieller Differentialoperator)**.

Definition 2: Sei $U(x, y, z)$ ein **Skalarfeld (SF)**. **Gradient** von $U(x, y, z)$ heißt das **Vektorfeld (VF)**

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\textbf{SF}\ U \quad\Longrightarrow\quad \textbf{VF}\ \operatorname{grad} U \qquad \operatorname{grad} U = \nabla U}$$

Definition 3: (Divergenz, Quellenfreiheit)

1. Sei $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$ ein **VF**. **Divergenz** von $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ heißt das **SF**

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\boxed{\textbf{VF}\ \mathbf{v} \quad\Longrightarrow\quad \textbf{SF}\ \operatorname{div} \mathbf{v} \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle}$$

2. Ein **VF v** mit der Eigenschaft $\operatorname{div} \mathbf{v}(x, y, z) = 0 \quad \forall\ (x, y, z) \in D$ heißt **quellenfrei**.

3. Ist $\mathbf{v}$ das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Flüssigkeitsströmung, so bedeutet $\operatorname{div} \mathbf{v}$ in einem Punkt die **lokale Quelldichte** in diesem Punkt.

Definition 4: (Rotation, Wirbelfreiheit)

1. Sei $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ ein **VF**. **Rotation** von $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ heißt das **VF**

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

$$\boxed{\textbf{VF } \mathbf{v} \quad \Longrightarrow \quad \textbf{VF } \operatorname{rot} \mathbf{v} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}}$$

2. Ein **VF v** mit der Eigenschaft rot $\mathbf{v}(x,y,z) = \Theta \quad \forall\,(x,y,z) \in D$ heißt **wirbelfrei**.
3. Ist **v** das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Flüssigkeitsströmung, so bedeutet rot **v** die **Wirbeldichte** des **VF v**.

Definition 5: Ein **VF v** heißt **konservatives Feld** oder **Potenzialfeld (PF)**, wenn ein **SF** U existiert, so dass gilt: $\mathbf{v} = grad\, U$. Dies ist gleichbedeutend mit

$$v_x = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} \wedge v_y = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y} \wedge v_z = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} \Longleftrightarrow v_x dx + v_y dy + v_z dz = dU.$$

Dabei heißt U das **Potenzial** von **v**.

2. Nabla-Rechnung

Eigenschaften des Gradienten

1° $\nabla(U_1 + U_2) = \nabla U_1 + \nabla U_2$

2° $\nabla(\lambda U) = \lambda\,\nabla U \qquad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}$

3° $\nabla(U_1 U_2) = U_1 \nabla U_2 + U_2 \nabla U_1$

4° $\nabla f(U) = f'(U)\,\nabla U$ für die mittelbare Funktion $f(U(x,y,z))$

Eigenschaften der Divergenz

1° $\langle \nabla, (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \rangle = \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle + \langle \nabla, \mathbf{w} \rangle$

2° $\langle \nabla, (\lambda \mathbf{v}) \rangle = \lambda\,\langle \nabla, \mathbf{v} \rangle \qquad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}$

3° $\langle \nabla, (U\mathbf{v}) \rangle = U\,\langle \nabla, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \nabla U \rangle$
Beachte: $\langle \nabla, \mathbf{v} \rangle =$ div **v** ist ein **SF**, aber $\langle \mathbf{v}, \nabla \rangle$ ist ein Operator.

4° $\langle \nabla, (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{w},\ \operatorname{rot} \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v},\ \operatorname{rot} \mathbf{w} \rangle$

Eigenschaften der Rotation

1° $\nabla \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \nabla \times \mathbf{v} + \nabla \times \mathbf{w}$

2° $\nabla \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda\,(\nabla \times \mathbf{v}) \qquad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}$

3° $\nabla \times (U\mathbf{v}) = U\,(\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla U)$

Zweifache Anwendung des Nabla-Operators

1° $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \langle \nabla, \nabla \times \mathbf{v} \rangle = 0 \Longrightarrow$ Jedes **Wirbelfeld** $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$ ist **quellenfrei**.

2° $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \nabla \times \nabla U = \Theta \Longrightarrow$ Jedes **PF** $\mathbf{v} = \nabla U$ ist **wirbelfrei**.

Die Kombinationen grad (grad U), div (div **v**), grad (rot **v**) und rot (div **v**) sind nicht definiert.