

MTM 07
Mathematik II (Teil 3) für Mikrotechniker/Mechatroniker
Übungsleiterin: HSD Dr. Sybille Handrock
Übungsblatt 2
Sommersemester 2009

Fourier-Transformation

- Es sei $h(t)$ die Heaviside-Funktion. Skizzieren Sie folgende Standardsignale (**HA:** b) (1), e) (3))
 - $f(t) = h(t - 1)$,
 - $f(t) = h(t + 1)$,
 - $f(t) = 3h(t - 2)$
 - $f(t) = h(t) + h(t - 1)$,
 - $f(t) = h(t) - h(t - 1)$,
 - $f(t) = t h(t - 3)$.
- Berechnen Sie das kontinuierliche Frequenzspektrum folgender Signale (**HA:** b) (2))
 - $f(t) = e^{-|t|}$,
 - $f(t) = \frac{1}{1 + t^2}$,
 - $f(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}}$, $t \neq 0$.
- Berechnen Sie mit Hilfe der Eigenschaften der Fouriertransformation und der Tabelle von Fouriertransformierten (Arbeitsblatt fourier.pdf) die Fouriertransformierten folgender Funktionen (**HA:** f) (4))
 - $f_1(t) = t^2 e^{-t^2}$,
 - $f_1(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin t}{t} \right)$,
 - $f_1(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$,
 - $f_1(t) = e^{2\pi i t} \frac{\sin 2t}{t}$,
 - $f_1(t) = f(at) \cos(bt)$, ($a > 0$),
 - $f_1(t) = e^{t(i-t)}$,
 - Sei $f(t) = e^{-|t|}$. Berechnen Sie die Faltung $f * f$ und ihre Fouriertransformierte.
- Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktionen
 - $f(t) = h(t) - h(t - 2T)$, ($T > 0$),
 - $f(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ ($a > 0$).
 Geben Sie jeweils das kontinuierliche Frequenzspektrum an und skizzieren Sie das (kontinuierliche) Amplituden- sowie Phasenspektrum von $f(t)$. (**HA:** b) (8))

Laplace-Transformation

- Berechnen Sie mit Hilfe der Eigenschaften der Laplacetransformation und der Tabelle von Laplacetransformierten (Arbeitsblatt laplace.pdf) die Laplacetransformierten folgender Funktionen (**HA:** a) (3), b) (3), d) (3))
 - $f_1(t) = e^t * \sin t$,
 - $f_1(t) = e^{3t} \sin t$,
 - $f_1(t) = t^2 \sin t$,
 - $f_1(t) = \frac{d}{dt} \cos t$,
 - $f_1(t) = \int_0^t e^{2\tau} \cos \tau d\tau$,
 - $f_1(t) = \int_0^t e^{\tau} \cos(t - \tau) d\tau$.
 - $f_1(t) = \frac{\sin t}{t}$,
 - $f_1(t) = \sin(2t - \pi/2)$.

2. Berechnen Sie die Rücktransformation L^{-1} zur Laplacetransformation von folgenden Funktionen (**HA:** b) (3), c) (3))

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & L(p) = \frac{1}{(p-1)^2 + 1}, \\ \text{b)} & L(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)}, \\ \text{c)} & L(p) = \frac{1}{p(p-1)}, \\ \text{d)} & L(p) = \frac{1}{p^2 - 9} \end{array}$$

3. Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben mittels Laplacetransformation (**HA:** a) (6), c) (6), e) (8) f) (8))

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & y' + 3y + \cos t = 0, & y(0) = 1, \\ \text{b)} & y''' + y'' - 2y' = te^{-t}, & y(0) = 1, y'(0) = -2, y''(0) = 3, \\ \text{c)} & y'' + 4y = t \sin 2t, & y(0) = 1, y'(0) = 0, \\ \text{d)} & y'' + 2y' + y = -11 \cos 2t + 2 \sin 2t, & y(0) = 1, y'(0) = 0, \\ \text{e)} & y''' + 2y'' + y' = \cos t, & y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = -1, y''(0) = \frac{3}{2}, \\ \text{f)} & y^{(4)} + y'' = 2 \cos t, & y(0) = -2, y'(0) = 1, y''(0) = y'''(0) = 0. \end{array}$$

4. Lösen Sie das Randwertproblem $y'' + 9y = \cos 2t$, $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = -1$.

5. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mit unstetiger rechter Seite in der Differentialgleichung

$$y''' + y'' - 2y' = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{für } 1 < t \end{cases} \quad y(0) = 1, y'(0) = -2, y''(0) = 3.$$

6. Betrachtet werden zwei Schwingkreise, die durch wechselseitige Induktion miteinander gekoppelt sind. Dabei bezeichnen L_1, L_2 die Selbstinduktionskoeffizienten bzw. C_1, C_2 die Kapazitäten der Schwingkreise. Ferner sei M der Wechselinduktionskoeffizient (Gegeninduktivität), durch den die wechselseitige Beeinflussung der Schwingkreise charakterisiert wird. Zusätzlich werde verschwindende Dämpfung, d.h. die ohmschen Widerstände sind gleich null, angenommen. Bezeichnet man noch mit I_1, I_2 die Stromstärken zur Zeit $t \geq 0$ in den Schwingkreisen und mit Q_1 die Ladung des Kondensators im ersten Schwingkreis, so lautet die Spannungsbilanz für den ersten Schwingkreis

$$L_1 \dot{I}_1 + M \dot{I}_2 + \frac{1}{C_1} Q_1 = 0.$$

Wegen der bekannten Beziehung $\dot{Q}_1 = I_1$ folgt hieraus durch Differenziation nach t die lineare Differentialgleichung

$$L_1 \ddot{I}_1 + M \ddot{I}_2 + \frac{1}{C_1} I_1 = 0.$$

Analog erhält man für den zweiten Schwingkreis die lineare Differentialgleichung

$$L_2 \ddot{I}_2 + M \ddot{I}_1 + \frac{1}{C_2} I_2 = 0.$$

Ermitteln Sie die Stromstärken $I_1(t)$ und $I_2(t)$ für $t \geq 0$ in den beiden Schwingkreisen im Spezialfall $L_1 = L_2 = L$ und $C_1 = C_2 = C$ unter den Anfangsbedingungen

$$I_1(0) = I_0, \quad \dot{I}_1(0) = 0, \quad I_2(0) = 0, \quad \dot{I}_2(0) = 0.$$

Abgabetermin für die Hausaufgaben: 06.07.2009