MTM 7
Mathematik II (Teil 3) für Mikrotechniker/Mechatroniker
Übungsleiterin: HSD Dr. Sybille Handrock
Übungsblatt 1
Sommersemester 2009

Oberflächenintegrale und Integralsätze

1. Berechnen Sie folgende Oberflächenintegrale

   a) $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$ mit $S = \{(x,y,z)\,|\,x+y+z=1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le x \le 1\}$,

   b) $\iint\limits_S \dfrac{\mathrm{d}S}{(1+x+z)^2}$, wobei S den im 1. Oktanten gelegenen Teil der Ebene $x+y+z=1$ darstellt, (**HA** (6))

   c) $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + xy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ mit $S = \{(x,y,z)\,|\,0 \le z \le xy,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le x \le 1\}$,

   d) $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, wobei S die Oberseite des im 1. Oktanten gelegenen Teils der Ebene $x+y+z=a$ $(a>0)$ ist. (**HA** (6))

2. Berechnen Sie die Masse der mit Masse der Dichte $\rho(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2+1})$ belegten Fläche S, wobei S die Fläche aus Aufgabe 1 c) ist. (**HA** (6))

3. Berechnen Sie den Vektorfluss des Vektorfeldes $\mathbf{v} = xy^2z\mathbf{i} + x^2yz\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ durch die geschlossene Fläche $S = S_1 \cup S_2$, wobei S_1 die Parameterdarstellung $x(u,v) = u,\ y(u,v) = v,\ z(u,v) = -u^2-v^2,\ (u,v) \in B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2\,|\,u^2+v^2 \le 1\}$ und S_2 die Parameterdarstellung $x(u,v) = u,\ y(u,v) = v,\ z(u,v) = -1,\ (u,v) \in B$ besitzt.

4. Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes $\mathbf{v} = (y-x)\mathbf{i} + (2x-y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ über dem Rand des im 1. Quadranten liegenden Sektors der Kreisfläche mit dem Radius 3 um den Koordinatenursprung in der xy-Ebene.

5. Es sei eine Fläche S mit einer Parameterdarstellung

   $$x = x(u,v) = u\cos v,\ y = y(u,v) = u\sin v,\ z = z(u,v) = v, \qquad (u,v) \in B$$

   gegeben. Dabei ist $B = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2\,|\,0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$ ein Rechteck in der uv-Ebene. Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes $\mathbf{v}(x,y,z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ längs der geschlossenen Randkurve C der Fläche S.

6. Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen bzw. Stokesschen Integralsatzes

   a) $\oiint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ und $\oiint\limits_S y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ jeweils über der Außenseite der Kugeloberfläche $x^2+y^2+z^2=a^2$, (**HA** (8))

   b) $\oint\limits_C (z-y)\,\mathrm{d}x + (x-z)\,\mathrm{d}y + (y-x)\,\mathrm{d}z$ über dem Dreieck mit den Eckpunkten $(a,0,0), (0,a,0)$ und $(0,0,a)$. (**HA** (6))

Fourier-Reihen

1. Bestimmen Sie die kleinste Periode T von $f(t)$ für a) $\sin(\omega t + \alpha)$, b) $\sin t\, \cos 3t$.

2. Definieren Sie von $g(t) = t^2,\ t \in]0,2[$ sowohl die geraden als auch die ungeraden periodischen Fortsetzungen $f(t)$.

3. Entwickeln Sie die periodische Fortsetzung $f(t)$ der gegebenen Funktionen $g(t)$ in eine reelle Fourier-Reihe und skizzieren Sie das diskrete Amplitudenspektrum (**HA:** b) (7), c) (7), f) (6), g) (9))

   a) $g(t) = t, \quad 0 < t < 2\pi,$ b) $g(t) = t^2, \quad -\pi \le t \le \pi,$

   c) $g(t) = \begin{cases} -a & \text{für} \quad -\pi < t < 0 \\ a & \text{für} \quad 0 < t < \pi \end{cases},$ d) $g(t) = \begin{cases} -t^2 & \text{für} \quad -\pi < t \le 0 \\ t^2 & \text{für} \quad 0 \le t < \pi \end{cases},$

   e) $g(t) = t(\pi - t), \quad 0 \le t \le \pi$, gerade Fortsetzung in $]-\pi, 0[$,

   f) $g(t) = t(\pi - t), \quad 0 \le t \le \pi$, ungerade Fortsetzung in $]-\pi, 0[$

   g) $g(t) = |\sin 2t|, \quad -2\pi \le t \le 2\pi,$ h) $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -2 < t < 0 \\ t & \text{für} \quad 0 \le t < 2 \end{cases}.$

4. Im Intervall $]-3, 3[$ sei die folgende Funktion gegeben:

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} t & \text{für} \quad |t| < \dfrac{3}{\pi} \\ 0 & \text{für} \quad \dfrac{3}{\pi} < |t| < 3 \end{cases}.$$

   a) Skizzieren Sie die Funktion $g(t)$.
   b) Bestimmen Sie die kleinste Periode und setzen Sie die Funktion $g(t)$ periodisch fort.
   c) Entwickeln Sie die periodische Fortsetzung in ihre reelle Fourier-Reihe.
   d) Untersuchen Sie die erhaltene Reihe auf Konvergenz.

5. Setzen Sie die Funktion $g(t) = \mathrm{e}^t, \quad t \in]-\pi, \pi[$ mit der Periode 2π fort und berechnen Sie das diskrete Frequenzspektrum. Geben Sie die komplexe Fourier-Reihe an. Skizzieren Sie das diskrete Amplitudenspektrum und das diskrete Phasenspektrum der 2π-periodischen Fortsetzung $f(t)$ der Funktion g(t).

6. Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten für die periodische Fortsetzungen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ der Funktionen

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\pi \le t \le 0 \\ \sin t & \text{für} \quad 0 \le t \le \pi \end{cases} \qquad g_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\dfrac{T}{2} \le t \le 0 \\ \sin \dfrac{2\pi t}{T} & \text{für} \quad 0 \le t \le \dfrac{T}{2} \end{cases}.$$

   in reeller und komplexer Form. Geben Sie in beiden Fällen die Fourier-Reihen an. Skizzieren Sie die diskreten Amplitudenspektren $(a_k)_k$, $(b_k)_k$, $(|c_k|)_k$ sowie das diskrete Phasenspektrum $(\arg c_k)_k$. (**HA** (14))

Abgabetermin für die Hausaufgaben: 25.05.2009