

## Geometrische und physikalische Anwendungen der Integralrechnung

**Voraussetzungen:** Die Integranden seien jeweils **stetige** Funktionen ihrer Argumente,  $B$  sei ein aus endlich vielen **Normalbereichen** zusammengesetzter ebener bzw. räumlicher Bereich,  $C$  sei eine **glatte** Kurve in der Ebene mit der expliziten Darstellung  $y = \varphi(x)$  und  $S$  sei eine **glatte zweiseitige** Fläche mit der expliziten Darstellung  $z = \varphi(x, y)$ .

### 1. Ebene Bereichsintegrale

- Sei  $f(x, y) = 1 \forall (x, y) \in B$ . Dann erhält man mit  $\iint_B db$  den Flächeninhalt von  $B$ .
- Sei  $f(x, y) \geq 0 \forall (x, y) \in B$ . Dann erhält man mit  $\iint_B f(x, y) db$  das Volumen des Körpers, begrenzt von oben durch die Fläche  $z = f(x, y)$ , von den Seiten durch zylindrische Flächen mit Erzeugenden parallel zur  $z$ -Achse und von unten durch den ebenen Bereich  $B$  in der  $xy$ -Ebene.
- Sei  $\rho(x, y)$  die Dichtefunktion einer kontinuierlich auf dem Bereich  $B$  verteilten Masse. Dann erhält man mit

$$m = \iint_B \rho(x, y) db \quad \text{die Gesamtmasse von } B,$$

$$M_y = \iint_B x\rho(x, y) db \quad \text{das statische Moment bezüglich der } y\text{-Achse,}$$

$$M_x = \iint_B y\rho(x, y) db \quad \text{das statische Moment bezüglich der } x\text{-Achse,}$$

$$I_y = \iint_B x^2\rho(x, y) db \quad \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } y\text{-Achse,}$$

$$I_x = \iint_B y^2\rho(x, y) db \quad \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } x\text{-Achse,}$$

$$x_0 = \frac{M_y}{m}, \quad y_0 = \frac{M_x}{m} \quad \text{die Schwerpunktskoordinaten von } B.$$

### 2. Räumliche Bereichsintegrale

- Sei  $f(x, y, z) = 1 \forall (x, y, z) \in B$ . Dann erhält man mit  $\iiint_B db$  das Volumen von  $B$ .
- Sei  $\rho(x, y, z)$  die Dichtefunktion einer kontinuierlich auf dem Bereich  $B$  verteilten Masse. Dann erhält man mit

$$m = \iiint_B \rho(x, y, z) db \quad \text{die Gesamtmasse von } B,$$

$$\begin{aligned}
M_{yz} &= \iiint_B \rho(x, y, z) \, db && \text{das statische Moment bezüglich der } yz\text{-Ebene,} \\
M_{zx} &= \iiint_B y\rho(x, y, z) \, db && \text{das statische Moment bezüglich der } zx\text{-Ebene,} \\
M_{xy} &= \iiint_B z\rho(x, y, z) \, db && \text{das statische Moment bezüglich der } xy\text{-Ebene,} \\
I_{yz} &= \iiint_B x^2\rho(x, y, z) \, db && \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } yz\text{-Ebene,} \\
I_{zx} &= \iiint_B y^2\rho(x, y, z) \, db && \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } zx\text{-Ebene,} \\
I_{xy} &= \iiint_B z^2\rho(x, y, z) \, db && \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } xy\text{-Ebene,} \\
x_0 &= \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_0 = \frac{M_{zx}}{m}, \quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m} && \text{die Schwerpunktskoordinaten von } B.
\end{aligned}$$

### 3. Kurvenintegrale 1. Art

- Sei  $f(x, y) = 1 \forall (x, y) \in C$ . Dann erhält man mit  $\int_C dl$  die Länge von  $C$ .
- Sei  $\rho(x, y)$  die Dichtefunktion einer kontinuierlich auf der Kurve  $C$  verteilten Masse. Dann erhält man mit

$$\begin{aligned}
m &= \int_C \rho(x, y) \, dl && \text{die Gesamtmasse von } C, \\
M_y &= \int_C x\rho(x, y) \, dl && \text{das statische Moment bezüglich der } y\text{-Achse,} \\
M_x &= \int_C y\rho(x, y) \, dl && \text{das statische Moment bezüglich der } x\text{-Achse,} \\
I_y &= \int_C x^2\rho(x, y) \, dl && \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } y\text{-Achse,} \\
I_x &= \int_C y^2\rho(x, y) \, dl && \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } x\text{-Achse,} \\
x_0 &= \frac{M_y}{m}, \quad y_0 = \frac{M_x}{m} && \text{die Schwerpunktskoordinaten von } C.
\end{aligned}$$

### 4. Kurvenintegrale 2. Art

- Der Flächeninhalt  $P$  des von einer **geschlossenen** Kurve  $C$  begrenzten ebenen Bereiches lässt sich auf verschiedene Weise als **Kurvenintegral 2. Art** berechnen:

$$P = \int_C x \, dy = - \int_C y \, dx = \frac{1}{2} \int_C x \, dy - y \, dx.$$

Dabei wird  $C$  gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen, derart, dass der Bereich zur Linken liegt.

- Der Begriff der Arbeit, die in der Vektoralgebra durch das **Skalarprodukt** zweier konstanter Vektoren darstellbar ist, wird durch das **Kurvenintegral 2. Art** auf den Fall von Vektorfunktionen verallgemeinert.

Sei  $\mathbf{v}(x, y) = v_x(x, y)\mathbf{i} + v_y(x, y)\mathbf{j}$  ein Kraftfeld, welches sich in den Punkten einer Kurve  $C$  nach Größe und Richtung ändert. Ferner sei  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$  ein Längenelement der Kurve  $C$ . Dann wird bei der Bewegung eines Massenpunktes der Masse 1 unter dem Einfluss dieser Kraft die Arbeit

$$W = \int_C v_x(x, y) dx + v_y(x, y) dy = \int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle$$

verrichtet.

Das **Kurvenintegral 2. Art** hängt bei festem Anfangs- und Endpunkt  $i$ . Allg. noch von der Kurve  $C$  ab, die beide Punkte verbindet (Wegabhängigkeit des **Kurvenintegrals 2. Art**). Die Arbeit hängt genau dann nicht von dem zwei Punkte verbindenden Weg  $C$  ab, (Wegunabhängigkeit des **Kurvenintegrals 2. Art**) wenn

$$\mathbf{v} = \nabla U$$

ist (d.h., der Integrand ist das **totale Differential** eines **SF**, des sogenannten **Potenzials**  $U(x, y)$  des Kraftfeldes  $\mathbf{v}$ ). In diesem Falle berechnet sich die Arbeit als Differenz der **Potenziale** in diesen beiden Punkten.

## 5. Oberflächenintegrale 1. Art

- Sei  $f(x, y, z) = 1 \forall (x, y, z) \in S$ . Dann erhält man mit  $\iint_S dS$  den Flächeninhalt von  $S$ .
- Sei  $\rho(x, y, z)$  die Dichtefunktion einer kontinuierlich auf der Fläche  $S$  verteilten Masse. Dann erhält man mit

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dS \quad \text{die Gesamtmasse von } S,$$

$$M_{yz} = \iint_S x\rho(x, y, z) dS \quad \text{das statische Moment bezüglich der } yz\text{-Ebene,}$$

$$M_{zx} = \iint_S y\rho(x, y, z) dS \quad \text{das statische Moment bezüglich der } zx\text{-Ebene,}$$

$$M_{xy} = \iint_S z\rho(x, y, z) dS \quad \text{das statische Moment bezüglich der } xy\text{-Ebene,}$$

$$I_{yz} = \iint_S x^2\rho(x, y, z) dS \quad \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } yz\text{-Ebene,}$$

$$I_{zx} = \iint_S y^2\rho(x, y, z) dS \quad \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } zx\text{-Ebene,}$$

$$I_{xy} = \iint_S z^2\rho(x, y, z) dS \quad \text{das Trägheitsmoment bezüglich der } xy\text{-Ebene,}$$

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_0 = \frac{M_{zx}}{m}, \quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m} \quad \text{die Schwerpunktskoordinaten von } S.$$

## 6. Oberflächenintegrale 2. Art

- Das Volumen  $V$  des von einer **geschlossenen** Fläche  $S$  begrenzten räumlichen Bereiches lässt sich auf verschiedene Weise als **Oberflächenintegral 2. Art** berechnen:

$$V = \iint_{S_+} x \, dy \, dz = \iint_{S_+} y \, dz \, dx = \iint_{S_+} z \, dx \, dy = \frac{1}{3} \iint_{S_+} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy.$$

Dabei bezeichnet  $S_+$  die Außenseite der Berandungsfläche  $S$ .

- Der Begriff des Vektorflusses durch eine Fläche, der in der Vektoralgebra durch das **Spatprodukt** dreier konstanter Vektoren darstellbar ist, wird durch das **Oberflächenintegral 2. Art** auf den Fall von Vektorfunktionen verallgemeinert.

Sei  $\mathbf{v}(x, y, z) = v_x(x, y, z)\mathbf{i} + v_y(x, y, z)\mathbf{j} + v_z(x, y, z)\mathbf{k}$  die **Stromdichte** einer stationären (d.h. zeitunabhängigen), inkompressiblen (d.h. von konstanter Dichte  $\rho$ ) Flüssigkeitsströmung, welche sich in den Punkten einer Fläche  $S$  nach Größe und Richtung ändert. Für die Stromdichte gilt:  $\mathbf{v} = \rho\mathbf{u}$ , wobei  $\mathbf{u}$  die Strömungsgeschwindigkeit bezeichnet. Ferner sei  $d\mathbf{w} = dy \, dz \, \mathbf{i} + dz \, dx \, \mathbf{j} + dx \, dy \, \mathbf{k}$  ein Oberflächenelement der Fläche  $S$ . Dann liefert

$$F = \iint_S v_x(x, y, z) \, dy \, dz + v_y(x, y, z) \, dz \, dx + v_z(x, y, z) \, dx \, dy = \iint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle$$

den Gesamtvektorfluss durch die Fläche  $S$ .

Das **Oberflächenintegral**

$$\iint_S v_x(x, y, z) \, dy \, dz + v_y(x, y, z) \, dz \, dx + v_z(x, y, z) \, dx \, dy$$

besitzt für verschiedene nichtgeschlossene Flächen mit der gleichen Randkurve  $C$  i. Allg. verschiedene Werte, bzw. es verschwindet i. Allg. nicht über eine geschlossene Fläche (in Analogie zur Wegabhängigkeit des **Kurvenintegrals 2. Art**).

Die **Vektorfunktion**  $\mathbf{v}$  sei jetzt zusätzlich **stetig differenzierbar** in einem **einfach zusammenhängenden räumlichen Bereich**  $B$  (d.h. in einem Bereich, der mit jeder geschlossenen Fläche auch den von dieser Fläche begrenzten Bereich enthält). Dann verschwindet der Vektorfluss durch eine beliebige geschlossene Fläche  $S$  in  $B$  genau dann, wenn

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

gilt. In diesem Falle strömt weder Flüssigkeit von außen in den Körper hinein, noch strömt Flüssigkeit von innen aus dem Körper heraus.

- Sei  $\mathbf{J}$  das **VF** der **elektrischen Stromdichte**. Dann erhält man mit

$$I = \iint_S \langle \mathbf{J}, d\mathbf{w} \rangle \quad \text{die elektrische Stromstärke.}$$

- Sei  $\mathbf{B}$  das **VF** der **magnetischen Induktion**. Dann erhält man mit

$$\Phi = \iint_S \langle \mathbf{B}, d\mathbf{w} \rangle \quad \text{den magnetischen Fluss.}$$