

CH 2
Mathematik II für Chemiker
Übungsleiterin: HSD Dr. Sybille Handrock
Übungsblatt 4
Sommersemester 2006

Integralrechnung für Funktionen einer reellen Variablen

1. Berechnen Sie den Wert der folgenden uneigentlichen Integrale, falls diese existieren

a) $\int_0^1 \ln x \, dx$, b) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 - x} \, dx$, c) $\int_0^{\infty} \sin x \, dx$. **(HA)**

Integralrechnung für Funktionen mehrerer reeller Variabler

1. Berechnen Sie folgende Bereichsintegrale

a) $\iint_B (x + y^3) \, db$ mit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$. **(HA)**

b) $\iint_B (x^2 + y) \, db$, wobei B von den Parabeln $y = x^2$ und $y^2 = x$ eingeschlossen wird. **(HA)**

c) $\iint_B 2y \, db$, wobei B durch $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ und $x + y = 2$ begrenzt wird.

d) $\iiint_B \frac{db}{(1 + x + y + z)^3}$, wobei B von den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + z = 1$ begrenzt wird. **(HA)**

e) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der von den Ebenen $z = 0$ und $y + z = 2$ sowie vom parabolischen Zylinder $y = x^2$ begrenzt wird.

f) Ermitteln Sie die Masse des mit Masse der Dichte $\rho(x, y, z) = x + y + z$ belegten Einheitswürfels $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}$. **(HA)**

2. Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale

a) $\int_C \sqrt{8x^2 + 3y^2} \, dl$, wobei C der Geradenabschnitt von $(0, 0)$ nach $(1, 2)$ ist.

b) $\int_C (x^2 + y^2) \, dl$, wobei C die Strecke zwischen den Punkten (a, a) und (b, b) $b > a$ bezeichnet. **(HA)**

c) $\int_C 2xy \, dx + x^2 \, dy$, wobei C die Gerade $y = x$ zwischen den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$ bezeichnet.

d) Gegeben seien die Punkte $A = (4, 2)$, $B = (2, 0)$ und $O = (0, 0)$ sowie die geradlinigen Wege C_1 von O nach A und C_2 von O über B nach A . Berechnen Sie die Kurvenintegrale 2. Art

(1) $\int_{C_i} (x + y) \, dx - x \, dy$ **(HA)** und (2) $\int_{C_i} y \, dx + x \, dy$

für beide Wege. Welches der Integrale ist wegunabhängig? Geben Sie für diese das Potenzial der integrierten Vektorfunktion an.

Differentialgleichungen

1. Geben Sie die allgemeine Lösung folgender gDG an:

a) $y' + x^2y = 0$, (HA) b) $y' = y \tan x$, c) $y' = (y - 9) \cos x$. (HA)

2. Lösen Sie die AWP

a) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ $y(0) = 1$ b) $yy' + x = 0$, $x > 0$ $y(1) = -\sqrt{3}$.

3. Lösen Sie die folgenden inhomogenen Differentialgleichungen erster Ordnung:

a) $y' - 3\frac{y}{x} = x$, b) $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$. (HA)

4. An einer bestimmten Stelle wurde nach der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl eine radioaktive Flächenbelastung N von 200 kBq/m^2 gemessen. Ein Jahr später ergab sich an der gleichen Stelle noch eine Belastung von 195.43 kBq/m^2 . Bekannt ist, dass die Änderungsgeschwindigkeit der radioaktiven Flächenbelastung proportional zur radioaktiven Flächenbelastung selbst ist. Ermitteln Sie, nach welcher Zeit die Belastung auf 150 kBq/m^2 gefallen sein wird. (HA) HINWEIS: Beispiel 5.3(1) Seite 54 im Vorlesungsskript.

5. In geringer Höhe h über der Erdoberfläche gilt für die Geschwindigkeit der Abnahme des Luftdruckes p unter Vernachlässigung der Gravitationskräfte und bei konstanter Temperatur die Beziehung

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{\rho_0}{p_0} g p.$$

Dabei bezeichnen p_0 bzw. ρ_0 den Druck bzw. die Dichte der Luft in der Höhe $h = 0$ und g die Erdbeschleunigung. Bestimmen Sie eine Funktion $p = p(h)$, die die Bedingung $p(0) = p_0$ erfüllt und welche die Abhängigkeit des Luftdruckes von der Höhe beschreibt.

6. In einem Behälter befinden sich 100 Liter einer Lösung, die 10 kg Salz enthält. In den Behälter fließt stetig Wasser zu (5 Liter/Min) welches sich gleichmäßig mit der Lösung vermischt. Das Gemisch fließt mit einer Geschwindigkeit von 5 Liter/Min wieder aus. Wieviel Salz ist nach einer Stunde im Behälter?

7. Lösen Sie folgende Anfangswertaufgaben für Systeme

a)
$$\begin{aligned} y_1' &= & y_2 & & y_1(0) &= & y_1^0 \\ y_2' &= & -2y_1 & -2y_2 & y_2(0) &= & y_2^0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} y_1' &= & y_2 & & y_1(0) &= & y_1^0 \\ y_2' &= & -y_1 & & y_2(0) &= & y_2^0 \end{aligned}$$

Die mit (HA) gekennzeichneten Aufgaben dienen der Prüfungsvorbereitung. Ihre selbständige Lösung wird dringend empfohlen. Eine Abgabe und Korrektur erfolgt nicht. Fragen zu diesen Aufgaben werden in der Konsultation geklärt.