

**CH 2**  
**Mathematik II für Chemiker**  
**Übungsleiterin: HSD Dr. Sybille Handrock**  
**Übungsblatt 3**  
**Sommersemester 2006**

**Vektoranalysis**

- Berechnen Sie  $\nabla U$  für die ebenen Skalarfelder  $U = U(x, y)$  bzw. räumlichen Skalarfelder  $U = U(x, y, z)$ . Veranschaulichen Sie die Lage von  $\nabla U$  zu den Niveaulinien  $N_c = \{(x, y) \mid U(x, y) = c\}$  bzw. Niveauflächen  $N_c = \{(x, y, z) \mid U(x, y, z) = c\}$ .  
 a)  $U = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,    b)  $U = x + y$ , (**HA (3)**)    c)  $U = xy$ ,  
 d)  $U = 3x + 4y + z$ ,    e)  $U = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , (**HA (3)**)    f)  $U = z - x^2 - y^2$ .
- Veranschaulichen Sie das Vektorfeld  $\mathbf{v}(x, y) = v_1(x, y)\mathbf{i} + v_2(x, y)\mathbf{j}$  mit  $v_1(x, y) = y$  und  $v_2(x, y) = 0$ . Skizzieren Sie das Feldlinienbild.
- Sei  $U = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Ermitteln Sie mit Hilfe des totalen Differentials wie sich  $U(x, y)$  näherungsweise ändert, wenn  $x$  von 3 auf 3.01 und  $y$  von 4 auf 4.024 wächst. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der tatsächlichen Änderung.

- Berechnen Sie für folgende Skalarfelder  $U$  im jeweils angegebenen Punkt  $P_0$  die Richtungsableitung in Richtung von  $\mathbf{l}$ . Geben Sie die Richtung des stärksten Wachstums von  $U$  an.

a)  $U = \sqrt{x^2 + y^2}$      $P_0 = (3, 4)$      $\mathbf{l} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$   
 b)  $U = e^{x+y+z}$ ,     $P_0 = (0, 0, 0)$ ,     $\mathbf{l} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ,    (**HA (4)**)  
 c)  $U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ ,     $P_0 = (a, b, c)$ ,     $\mathbf{l} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$      $abc \neq 0$ .

- Berechnen Sie vom Potenzial  $U = U(\mathbf{r}) = f(r) = 3r^2 + \frac{1}{r^2}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  die Feldstärke  $\mathbf{E} = -\text{grad } U$ . Für welche Punkte wird  $|\mathbf{E}|$  minimal?

- Berechnen Sie für  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  und  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = \text{konst.}$  die Größen  
 a)  $\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$ , (**HA (4)**)    b)  $\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$ , (**HA (4)**)    c)  $\text{div grad } \frac{1}{r}$ .

- Berechnen Sie  $\text{div } \mathbf{v}$  sowie  $\text{rot } \mathbf{v}$  und veranschaulichen Sie die Kraftlinien des VF

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

- Welche der folgenden Felder sind quellen- bzw. wirbelfrei? (**HA (3), (3), (6)**)

a)  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$     b)  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -z \end{pmatrix}$     c)  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 2xy + 2xz^2 + 3x^2 \\ x^2 + z^2 + 2y \\ 2yz + 2x^2z + 1 \end{pmatrix}$

- Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation für das Vektorfeld

$$\mathbf{v} = (x^2 + 5ay + 3yz)\mathbf{i} + (5x + 3axz - 2)\mathbf{j} + ((2 + a)xy - 4z)\mathbf{k}.$$

Wann ist dieses Feld quellen- bzw. wirbelfrei?

## Integralrechnung

1. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

- a)  $\int (e^{x+1} + 2^{-x} - \pi) dx$ , (**HA** (1))    b)  $\int (2^x e^x + 23\sqrt{x^3\sqrt{x\sqrt{x}}}) dx$ ,
- c)  $\int (e^x \cosh x + \frac{1}{x^2 - 6x + 9}) dx$ ,    d)  $\int x(\sin(x^2) + \cos(x^2)) dx$ , (**HA** (1))
- e)  $\int \ln(x^2 + a^2) dx$ ,    f)  $\int \sqrt{x} \ln x dx$ , (**HA** (2))
- g)  $\int (x^2 - 1) \cos(2x) dx$ ,    h)  $\int \sin^3 x dx$ , (**HA** (2))
- i)  $\int (\sin x)^{-1} dx$ ,    j)  $\int 3\sqrt{8x - 4} dx$ , (**HA** (2))
- k)  $\int (6x + 3)e^{x^2+x-1} dx$ ,    l)  $\int 3e^x \sqrt{e^x + 1} dx$ , (**HA** (2))
- m)  $\int \frac{x \cos(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ,    n)  $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5 + \cos x}} dx$ , (**HA** (2))
- o)  $\int \frac{1}{(a+x)(a-x)} dx$ ,    p)  $\int \frac{x+2}{x^3 - 2x^2 + x} dx$ , (**HA** (5))
- q)  $\int \frac{2x^2 + 9x + 12}{x^2 + 6x + 10} dx$ ,    r)  $\int \frac{x}{(x^2 + 2x + 1)^2} dx$ . (**HA** (5))

2. Bei der Verseifung von Äthylacetatlösung der Konzentration 0.02 mol/l mit Natronlauge der Konzentration 0.03 mol/l seien nach 30 min 75 % verseift. Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskonstante  $k$  der Verseifungsreaktion aus der Beziehung

$$kt = \int \frac{dx}{(0.02 - x)(0.03 - x)}.$$

3. Berechnen Sie die bestimmten Integrale

- a)  $\int_{1/e}^e \frac{\ln x}{x} dx$ ,    b)  $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx$ ,    c)  $\int_0^{2\pi} |x \sin x| dx$ . (**HA** (2))

4. Berechnen Sie den Flächeninhalt der ebenen Punktmenge, die begrenzt wird durch

a)  $y = f(x) = x \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$ ,

b)  $y = f(x) = x^2 \cos 2x$  und das Intervall  $[0, x_0]$ , wobei  $x_0$  die kleinste positive Nullstelle von  $f(x)$  ist. (**HA** (3))

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Figur, die von den Kurven  $ya = x^2$  und  $xa = y^2$  ( $a > 0$ ) eingeschlossen wird.

5. Berechnen Sie die isotherme Ausdehnungsarbeit

a) eines *van der Waals'schen* Gases  $(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$ ,

b) eines *Clausius'schen* Gases  $(p + \frac{A}{T(V+C)^2})(V - B) = RT$ , (**HA** (3))

( $p$  - Druck,  $T$  - Temperatur,  $V$  - Volumen,  $R$  - Gaskonstante,  $a$ ,  $b$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  - spezifische Konstanten).

**Abgabetermin für die Hausaufgaben: 27.06.2005**