

CH 2
Mathematik II für Chemiker
Übungsleiterin: HSD Dr. Sybille Handrock
Übungsblatt 2
Sommersemester 2006

Lineare Gleichungssysteme (IGS)

1. Geben Sie die allgemeine Lösung folgender homogenen IGS an:

a) $x_1 + x_2 + x_3 = 0,$
 $x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$
b) $2x_1 - x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0$
 $3x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 0,$ **(HA (4))**,
c) $x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$
 $x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0.$

2. Untersuchen Sie folgende IGS auf Lösbarkeit und lösen Sie diese im Lösbarkeitsfall

a) $2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1$
 $x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$
 $x_2 + x_3 = 5,$ b) $x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$
 $3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0,$
c) $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10$
 $x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 16$
 $3x_1 + 3x_2 + x_3 = 16,$ d) $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2$
 $5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 = 7$
 $4x_1 + 8x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 5,$
e) $x_1 - x_2 - x_3 = 0$
 $3x_1 + 6x_2 = 12$
 $3x_1 + 9x_3 = 12$ f) $x_1 + x_2 - x_3 = 1$
 $2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 3$
 $6x_2 - 9x_3 = 0,$ $x_1 + ax_2 + 3x_3 = 2.$

(HA: b) (4), c) (2), d) (5))

3. Sind die folgenden IGS für beliebige rechte Seiten lösbar? Falls nicht, so geben Sie jeweils eine rechte Seite, für die das IGS lösbar ist und eine für die es unlösbar ist, an:

a) $x_1 + 2x_2 - x_3 = y_1$
 $x_1 + x_2 + x_3 = y_2$
 $3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = y_3,$ b) $x_1 + x_3 = y_1$
 $x_1 + x_2 + 2x_3 = y_2$
 $2x_1 + x_2 + 3x_3 = y_3.$

4. Für welche λ ist das folgende Gleichungssystem lösbar bzw. unlösbar? Lösen Sie das IGS für $\lambda = 13$. Geben Sie eine Zahl λ an, für die das IGS unlösbar ist. Interpretieren Sie in beiden Fällen das Ergebnis geometrisch. **(HA (4))**

$x_1 + 3x_2 - x_3 = 8$
 $2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 19$
 $3x_1 + 10x_2 + \lambda x_3 = 10$

5. Sei $a \neq 0$. Unter welchen Bedingungen an b besitzt das folgende IGS eine eindeutige Lösung oder keine Lösung?

$ax_1 + bx_2 = 3$
 $3ax_1 - x_2 = 1$ **(HA (3))**

6. Für welche Werte a und b besitzt das folgende System genau eine Lösung, keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen? Geben Sie die Lösung des Systems für $a = 1$ und $b = 4$ an. Interpretieren Sie den Fall unendlich vieler Lösungen geometrisch.

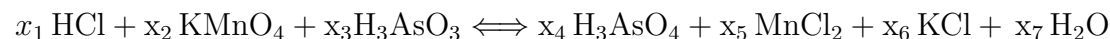
$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -4 \\2x_1 + x_2 + x_3 &= +2 \\x_1 + ax_2 + 2x_3 &= -b\end{aligned}$$

7. Geben Sie drei linear unabhängige Lösungen des folgenden homogenen IGS an. Können vier Lösungen dieses homogenen IGS linear unabhängig sein? (**HA (5)**)

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 &= 0 \\-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0\end{aligned}$$

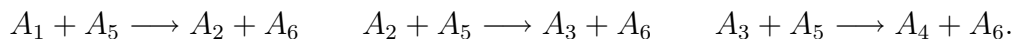
8. Untersuchen Sie die Polynome $\{x^3 + 2x^2, 2x^3 + 2x^2 - 6x + 4, -x^2 + 3x, x^2 - 1\}$ im Vektorraum aller Polynome vom Grade ≤ 3 , definiert auf einem beliebigen Intervall $[a, b]$ auf lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit.

9. Bestimmen Sie für die Reaktion



die stöchiometrischen Koeffizienten x_1, \dots, x_7 .

10. Stellen Sie die stöchiometrische Matrix \mathbf{C} für folgende dreistufige konkurrierende Folgereaktion auf und bestimmen Sie den Rang $r(\mathbf{C})$:



Eigenwertprobleme

1. Bestimmen Sie die reellen Werte λ , für die die nachfolgenden IGS-e eine eindeutige, keine eindeutige, bzw. überhaupt keine Lösung besitzen.

$$\begin{aligned}\text{a) } (4 - \lambda)x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\-x_1 - \lambda x_2 - x_3 &= 0 \\2x_2 + (2 - \lambda)x_3 &= 1 \quad (\mathbf{HA} (8)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } -(3 + \lambda)x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\-5x_1 + (2 - \lambda)x_2 + 4x_3 &= 1 \\-3x_1 + x_2 + (3 - \lambda)x_3 &= 3.\end{aligned}$$

2. Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren folgender Matrizen

$$\begin{aligned}\text{a) } \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \\ \text{b) } \mathbf{A}_2 &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 2k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix} \quad k_1, k_2 > 0.\end{aligned}$$

(**HA:** $C_1(6), A_2(7), C_2(7)$)

3. Transformieren Sie die reelle symmetrische Matrix \mathbf{D}_1 auf eine Diagonalmatrix.

4. Orthogonalisieren Sie die Eigenvektoren der Matrix \mathbf{B}_2 .

Abgabetermin für die Hausaufgaben: 23.05.2006