

CH 2
Mathematik II für Chemiker
Übungsleiterin: HSD Dr. Sybille Handrock
Übungsblatt 1
Sommersemester 2006

Vektorräume

1. Untersuchen Sie auf lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit:
 - a) Die Polynome $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ im reellen linearen Raum aller Polynome vom Grade $\leq n$, definiert auf einem beliebigen abgeschlossenen Intervall.
 - b) Die komplexen Zahlen $\{1, i\}$ im komplexen linearen Raum \mathbb{C} aller komplexen Zahlen. (**HA** (2))
 - c) Die Funktionen $\{\sin x, \cos x\}$ sowie $\{\sin^2 x, \cos^2 x, 1\}$ im Vektorraum $C[a, b]$.
2. Untersuchen Sie folgende Vektoren aus \mathbb{R}^2 auf lineare Unabhängigkeit:
 - a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (**HA** (2))
 - b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. (**HA** (2))
3. Welche der folgenden Systeme von Vektoren bilden eine Basis in \mathbb{R}^2 ? (**HA**: a)(2), c)(2))
 - a) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, b) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$, c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$
4. Der Vektor \mathbf{x} besitze in der kanonischen Basis die Koordinaten $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Vektors in der Basis $\{\mathbf{i}, \mathbf{x}^1\}$ mit $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Matrizen und Determinanten

1. Berechnen Sie von den nachstehend aufgeführten Matrizen die Summe, die Differenz, die beiden möglichen Produkte, die transponierte Matrix, die Determinante, die Determinante der Produkte und den Rang:
 - a) $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
 - b) $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1/2 & -1 \\ 1/3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ (**HA** (18))

2. Aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3, R_4 werden fünf Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 hergestellt, woraus drei Endprodukte E_1, E_2, E_3 gefertigt werden. Die Rohstoff- bzw. Zwischenproduktverbrauchsnormen zur Produktion von Z_i bzw. E_i sind gegeben durch

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
R_1	0	1	1	1	2
R_2	5	0	1	2	1
R_3	1	1	1	1	0
R_4	0	2	0	1	0

	E_1	E_2	E_3
Z_1	1	1	1
Z_2	1	2	0
Z_3	0	1	1
Z_4	4	1	1
Z_5	3	1	1.

Wieviel Einheiten von R_1, R_2, R_3, R_4 sind bereitzustellen, wenn 100 Einheiten von E_1 , 200 Einheiten von E_2 und 300 Einheiten von E_3 hergestellt werden sollen?

3. Aus fünf Rohstoffen R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 werden zwei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 hergestellt, die zu drei Endprodukten E_1, E_2, E_3 weiterverarbeitet werden. Ermitteln Sie unter Verwendung der Tabellen

	Z_1	Z_2
R_1	2	1
R_2	0	2
R_3	3	1
R_4	5	0
R_5	3	4

	E_1	E_2	E_3
Z_1	1	2	4
Z_2	6	3	2.

den Rohstoffbedarf für die Endprodukte, wenn diese in den Stückzahlen $E_1 = 80$, $E_2 = 20$ und $E_3 = 100$ produziert werden sollen. (HA (6))

4. Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 9 & 4 \\ 2 & -3 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{HA}(6))$$

5. Lösen Sie die folgenden Matrixgleichungen: (HA: b) (4))

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} + 3 \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{A} - \mathbf{E}) = 2\mathbf{B}^T + \mathbf{X} - \mathbf{E}$ mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Berechnen Sie für die Matrizen \mathbf{A}_2 und \mathbf{B}_2 (HA (8)) die inverse Matrix.
 7. Geben Sie Beispiele symmetrischer, schief-symmetrischer und hermitescher Matrizen an.
 8. Wie lauten die Matrizen, die eine Drehung in der xy -Ebene um den Koordinatenursprung um die Winkel

a) $\varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \text{b) } \varphi = \frac{\pi}{6}, \quad \text{c) } \varphi = 2\pi, \quad \text{d) } \varphi = \pi?$

vermitteln? Überprüfen Sie, ob diese Matrizen orthogonal sind. (HA: b)(4), c)(4))

Abgabetermin für die Hausaufgaben: 25.04.2006