

**CH1 - Ergänzungsaufgaben**  
**Leitung: HSD Dr. Sybille Handrock**  
**Übungsleiter: Dr. Sorin-Mihai Grad**  
**Aufgabenblatt 1**  
**Wintersemester 2006/2007**

### Komplexe Zahlen

1. Lösen Sie die Gleichung  $x^3 - 4x^2 + 8x = 8$  in  $\mathbb{R}$  und in  $\mathbb{C}$  und führen Sie die Probe aus.

2. Berechnen Sie  $\left( \frac{1+i}{1-i} + \frac{3-i}{4+i} + \frac{2+i}{i-1} + \frac{2i-3}{i+1} - \frac{(27i-6)(4+i)^{-1}}{4-i} \right)^{2006}$ .

3. Berechnen Sie alle Wurzeln folgender komplexen Zahlen und stellen Sie diese graphisch dar:

a)  $\sqrt[5]{-i}$                       b)  $\sqrt[4]{i+3}$                       c)  $\sqrt[3]{27i^6}$ .

4. Lösen Sie die Gleichung  $z^3 - 4iz^2 - z = 6i$ .

5. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von Moivre:

a)  $(1+i)^{2006}$                       b)  $(1-i)^{2006}$                       c)  $(i-1)^{2006}$ .

6. Stellen Sie trigonometrisch dar:

a)  $z = \frac{i-1}{i+1}$ ,                      b)  $z = \frac{1+i}{1-i}$ ,                      c)  $z = (i+1)^2$ .

### Reeller Funktionen einer reellen Variablen

1. Stellen Sie die Funktion graphisch dar, die die Beziehung der reziproken absoluten Temperatur  $y = \frac{1}{T}$  in  $K^{-1}$  zur Celsius-temperatur  $x = \vartheta(^{\circ}C)$  darstellt. Wie lautet die Gleichung dieser Funktion? Wo liegt der physikalisch sinnvolle Definitionsbereich dieser Funktion?

2. Die Zerfallskonstante  $k$  von Radon 222 beträgt 3,8 Tage, das Zerfallsgesetz lautet  $n(t) = n_0 e^{-\frac{t}{k}}$ . Was für eine Kurve ist der Graph des Zerfallsgesetzes?

3. Man bestimme die Umkehrfunktionen zu

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,                      b)  $f(x) = \ln x$ ,                      c)  $f(x) = \cosh(x)$ ,                      d)  $f(x) = \arcsin x$ ,

und gebe den jeweiligen Definitions- und Wertebereich an.

4. Kann die für alle  $x \neq 0$  definierte und dort stetige Funktion  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$  zu einer auf der gesamten reellen Achse stetigen Funktion ergänzt werden?

5. Zeigen Sie dass, die Funktion  $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 0, \\ -1, & x \in [0, 1], \\ x, & x > 1, \end{cases}$  auf  $\mathbb{R}$  monoton wachsend ist. Wo ist  $f$  umkehrbar? Berechnen Sie die Umkehrfunktion zu  $f$  auf den Intervallen, wo es ist möglich.

6. Geben Sie die Partialbruchzerlegung an:

$$a) \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - 4x^2 + 8x - 8}, \quad b) \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6}.$$

7. Berechnen Sie aus der Gleichung für den senkrechten Wurf  $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$  die Zeit, nach der ein Körper 10m tief gefallen ist, wenn die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 5ms^{-1}$  beträgt ( $g \simeq 9,81ms^{-2}$ ). Warum ergibt sich in diesem Falle aus der quadratischen Gleichung nur eine Lösung?

### Funktionen mehrerer Variabler

1. In der Raman Spektroskopie tritt das Produkt  $\cos(2\pi\nu_k t) \cdot \cos(2\pi\nu t)$  mit den Frequenzen  $\nu_k$  und  $\nu$  auf. Drücken Sie dieses Produkt als Summe von Kosinusfunktionen aus.

2. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der folgender reellwertigen Funktionen:

$$a) f(x, y) = \ln(1 + x^2 y^2), \quad b) f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad c) f(x, y) = \sin \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

3. Man zeige:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = 0.$$

4. Man zeige, daß die Grenzwerte

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad \text{und} \quad b) \lim_{(x,y) \rightarrow (3,3)} \frac{(x - 3)y}{x(y - 3)}$$

nicht existieren.

5. Ermitteln Sie  $\frac{\partial f}{\partial x}$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}$  für die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(u, v) = u^2 + 3uv + 4v^2$ , mit  $u(x, y) = 2 - 2xy^2$  und  $v(x, y) = 1 + x$ ,

a) mit Hilfe der Kettenregel, und b) durch Substitution von  $u$  und  $v$  in  $f$ .

6. Bilden Sie für  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  die partiellen Ableitungen:

$$a) \frac{\partial f}{\partial x}, \quad b) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad c) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad d) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad e) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

7. Die Entropie  $S$  für ein Mol eines idealen Gas lautet als Funktion der Temperatur  $T$  und des Druckes  $P$ :  $S = S_0 + C_p \ln(T) - R \ln(P)$ , wo  $S_0$ ,  $C_p$  und  $R$  sind Konstanten.

Ermitteln Sie die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial S}{\partial T}$  und  $\frac{\partial S}{\partial P}$ .