CH1 - Ergänzungsaufgaben
Leitung: HSD Dr. Sybille Handrock
Übungsleiter: Dr. Sorin-Mihai Grad
Aufgabenblatt 1
Wintersemester 2006/2007

Komplexe Zahlen

1. Lösen Sie die Gleichung $x^3 - 4x^2 + 8x = 8$ in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$ und führen Sie die Probe aus.
2. Berechnen Sie $\left(\frac{1+i}{1-i} + \frac{3-i}{4+i} + \frac{2+i}{i-1} + \frac{2i-3}{i+1} - \frac{(27i-6)(4+i)^{-1}}{4-i}\right)^{2006}$.
3. Berechnen Sie alle Wurzeln folgender komplexen Zahlen und stellen Sie diese graphisch dar:

   $a) \sqrt[5]{-i}$ $\qquad b) \sqrt[4]{i+3}$ $\qquad c) \sqrt[3]{27i^6}$.
4. Lösen Sie die Gleichung $z^3 - 4iz^2 - z = 6i$.
5. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von Moivre:
   $a) (1+i)^{2006}$ $\qquad b) (1-i)^{2006}$ $\qquad c) (i-1)^{2006}$.
6. Stellen Sie trigonometrisch dar:

   $a) z = \frac{i-1}{i+1},$ $\qquad b) z = \frac{1+i}{1-i},$ $\qquad c) z = (i+1)^2$.

Reeller Funktionen einer reellen Variablen

1. Stellen Sie die Funktion graphisch dar, die die Beziehung der reziproken absoluten Temperatur $y = \frac{1}{T}$ in K^{-1} zur Celsius-temperatur $x = \vartheta(°C)$ darstellt. Wie lautet die Gleichung dieser Funktion? Wo liegt der physikalisch sinnvolle Definitionsbereich dieser Funktion?
2. Die Zerfallskonstante k von Radon 222 beträgt 3,8 Tage, das Zerfallsgesetz lautet $n(t) = n_0 e^{-\frac{t}{k}}$. Was für eine Kurve ist der Graph des Zerfallsgesetzes?
3. Man bestimme die Umkehrfunktionen zu

   $a) f(x) = \frac{1}{x},$ $\qquad b) f(x) = \ln x,$ $\qquad c) f(x) = \cosh(x),$ $\qquad d) f(x) = \arcsin x,$

   und gebe den jeweiligen Definitions- und Wertebereich an.
4. Kann die für alle $x \neq 0$ definierte und dort stetige Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ zu einer auf der gesamten reellen Achse stetigen Funktion ergänzt werden?

5. Zeigen Sie dass, die Funktion $f(x) = \begin{cases} x-2, & x<0, \\ -1, & x \in [0,1], \\ x, & x>1, \end{cases}$ auf $\mathbb{R}$ monoton wachsend ist. Wo ist f umkehrbar? Berechnen Sie die Umkehrfunktion zu f auf den Intervallen, wo es ist möglich.

6. Geben Sie die Partialbruchzerlegung an:

   $$a)\frac{2x^2-3x+1}{x^3-4x^2+8x-8}, \qquad b)\frac{2x^3+x^2-3x+1}{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}.$$

7. Berechnen Sie aus der Gleichung für den senkrechten Wurf $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ die Zeit, nach der ein Körper $10m$ tief gefallen ist, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 5ms^{-1}$ beträgt ($g \simeq 9,81ms^{-2}$). Warum ergibt sich in diesem Falle aus der quadratischen Gleichung nur eine Lösung?

Funktionen mehrerer Variabler

1. In der Raman Spektroskopie tritt das Produkt $\cos(2\pi\nu_k t)\cdot\cos(2\pi\nu t)$ mit den Frequenzen ν_k und ν auf. Drücken Sie dieses Produkt als Summe von Kosinusfunktionen aus.

2. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der folgender reellwertigen Funktionen:

   $$a) f(x,y) = \ln(1+x^2y^2), \qquad b) f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}, \qquad c) f(x,y) = \sin\frac{1}{x^2+y^2}.$$

3. Man zeige:

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^4-y^4}{x^2+y^2} = 0.$$

4. Man zeige, daß die Grenzwerte

   $$a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2}}, \qquad \text{und} \qquad b) \lim_{(x,y)\to(3,3)} \frac{(x-3)y}{x(y-3)}$$

   nicht existieren.

5. Ermitteln Sie $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ für die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(u,v) = u^2+3uv+4v^2$, mit $u(x,y) = 2-2xy^2$ und $v(x,y) = 1+x$,

   $a)$ mit Hilfe der Kettenregel, und $b)$ durch Substitution von u und v in f.

6. Bilden Sie für $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ die partiellen Ableitungen:

   $$a)\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad b)\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad c)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \qquad d)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad e)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

7. Die Entropie S für ein Mol eines idealen Gas lautet als Funktion der Temperatur T und des Druckes P: $S = S_0 + C_p\ln(T) - R\ln(P)$, wo S_0, C_p und R sind Konstanten. Ermitteln Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial S}{\partial T}$ und $\frac{\partial S}{\partial P}$.