CH1 - Ergänzungskurs Elementarmathematik
Leitung: HSD Dr. Sybille Handrock
Übungsleiter: Andreas Günnel
Aufgabenblatt 3
Wintersemester 2006/2007

Skalar- und Vektorprodukt

Wiederholung der Definitionen und Eigenschaften

Definition: Skalarprodukt (SK) oder **inneres Produkt** zweier **Vektoren a** und **b** heißt der **Skalar**

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\alpha$$

mit $\alpha = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Speziell heißt $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$ **Skalarquadrat**.

Ist $\mathbf{a} = \Theta$ oder $\mathbf{b} = \Theta$, so setzt man $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$. Ist $\mathbf{a} \neq \Theta$ und $\mathbf{b} \neq \Theta$, so gilt:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \text{ ist } \begin{cases} > 0, & \text{falls} \quad 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \\ = 0, & \text{falls} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \\ < 0, & \text{falls} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi. \end{cases}$$

Eigenschaften des SK

(1) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ Das Zeichen $\perp$ bedeutet, dass **a** und **b** senkrecht aufeinander stehen.

(2) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ gleich gerichtet $\Longrightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$

(3) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ entgegengesetzt gerichtet $\Longrightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$

(4) Für $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ folgt aus der Definition $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}| \cos 0 = |\mathbf{a}|^2$. Daraus folgt $|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$.

(5) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$.

(6) $\langle (\mathbf{a} + \mathbf{b}), \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$

(7) $\langle (\lambda \mathbf{a}), \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, (\lambda \mathbf{b}) \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \quad \lambda \in R$

(8) Das **SK** ist **nicht assoziativ**, da die Produkte $\langle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \mathbf{c} \rangle$ und $\langle \mathbf{a}, \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \rangle$ nicht definiert sind.

(9) Für die **Einheitsvektoren** $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} \langle \mathbf{i}, \mathbf{i} \rangle & = & \langle \mathbf{j}, \mathbf{j} \rangle & = & \langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle & = 1 \\ \langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle & = & \langle \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle & = & \langle \mathbf{k}, \mathbf{i} \rangle & = 0 \\ \langle \mathbf{j}, \mathbf{i} \rangle & = & \langle \mathbf{k}, \mathbf{j} \rangle & = & \langle \mathbf{i}, \mathbf{k} \rangle & = 0. \end{array}$$

Daraus folgt für das **SK** in Koordinatenschreibweise:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle a_x\, \mathbf{i} + a_y\, \mathbf{j} + a_z\, \mathbf{k}, b_x\, \mathbf{i} + b_y\, \mathbf{j} + b_z\, \mathbf{k} \rangle = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z.$$

Definition: Vektorprodukt (VP) zweier **Vektoren a** und **b** im Raum heißt ein **Vektor v** (Bezeichnung: $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$) mit folgenden Eigenschaften:

1. $|\mathbf{v}| \;=\; |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\alpha$,
2. $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$ und $\mathbf{v} \perp \mathbf{b}$,
3. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{v}$ bilden in dieser Reihenfolge ein **Rechtssystem**, falls $|\mathbf{v}| \neq 0$.

Eigenschaften des VP

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \Theta \Longleftrightarrow \mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet.

(2) Speziell ist $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \Theta$.

(3) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Longrightarrow |\mathbf{v}| \;=\; |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \;=\; |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$

(4) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ Das **VP** ist **nicht kommutativ**, sondern **alternativ**.

(5) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

(6) $(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

(7) Das **VP** ist **nicht assoziativ**. Die Produkte $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ und $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ existieren und sind jeweils wieder Vektoren. I.Allg. gilt aber die Gleicheit nicht.

(8) Für drei aufeinander senkrecht stehende und ein Rechtssystem bildende **Einheitsvektoren i**, **j**, **k** gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{j} &&= \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \Theta \\
\mathbf{i} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{j} \times \mathbf{i} &&= \mathbf{k} \\
\mathbf{j} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{k} \times \mathbf{j} &&= \mathbf{i} \\
\mathbf{k} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{i} \times \mathbf{k} &&= \mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt für das **VP** in Koordinatenschreibweise:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}) \times (b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k}) \\
&= (a_y\,b_z - a_z\,b_y)\,\mathbf{i} + (a_z\,b_x - a_x\,b_z)\mathbf{j} + (a_x\,b_y - a_y\,b_x)\,\mathbf{k} \\
&= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k} \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

1. Eine konstante Kraft **F** wirke längs eines Weges **S**. Zu bestimmen ist die Verschiebungsarbeit W. Unterscheiden Sie dabei die Fälle

   (1) **S** und **F** gleichgerichtet.

   (2) **S** und **F** bilden einen Winkel $\alpha \neq 0$.

2. Ein starrer Körper K sei um eine feste Achse z drehbar, im Punkt P dieses Körpers greife eine Kraft **F** an. Ferner sei **a** ein **Vektor** mit dem Anfangspunkt in 0 und dem Endpunkt P. Zu bestimmen ist das Drehmoment M. Unterscheiden Sie dabei die Fälle

   (1) $\mathbf{F} \perp \mathbf{a}$

   (2) **F** und **a** bilden einen Winkel $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.