CH 1
Mathematik I für Chemiker
Übungsleiterin: HSD Dr. Sybille Handrock
Übungsblatt 4
Wintersemester 2006/2007

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variabler

1. Bilden Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung folgender Funktionen

   a) $u = x^2 e^y + \sin^2(2xy) + \cosh(x + xy)$, (**HA**) b) $u = \sin(x^2 + y^2)$. (**HA**)
   c) $u = x \sin(y^2 + z^2) + \ln(x + y^2)$ d) $u = 4x^2 y \cos z + 3e^v \sin 2z$.

2. Berechnen Sie das totale Differential der Funktionen

   a) $S = S(T, V) = c_V \ \ln T + R \ln V + S_0$ - Entropie eines idealen Gases, (c_V - Molwärme bei konstantem Volumen V, R - Gaskonstante, T - Temperatur, S - Entropiefunktion, S_0- Konstante). (**HA**)

   b) $E = E(x, v) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$ - Gesamtenergie eines harmonischen Oszillators, (x - Auslenkung aus der Ruhelage, $v = \dot{x}$ - Geschwindigkeit, m - Masse, k - Federkonstante). (**HA**)

   c) $p = p(V, T) = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}$ - van der Waalssche Zustandsgleichung (a, b - positive Konstanten, R - Gaskonstante, p - Druck, V - Volumen, T - Temperatur).

3. Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktionen

   $$u = g_{1/2}(v(x), w(x)) = v^2 \pm w^2 \mp 10 \quad \text{mit} \quad v(x) = 2 \cos x \quad \text{und} \quad w(x) = 2 \sin x$$

   nach der verallgemeinerten Kettenregel.

4. Berechnen Sie für die Funktion $y = f(x)$, die durch die Gleichung

   $$F(x, y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \ \tan y + \frac{y}{x} - 3(x^2 - 1) - \pi = 0$$

   in impliziter Form gegeben ist, die erste Ableitung $y' = f'(x)$. Welchen Wert hat $f'(x)$ im Punkt $P = (1, \pi)$?

5. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die durch $u = x^2 + y^2$ gegebene Fläche F im Punkt $P_0 = (x_0, y_0, u_0)$. Betrachten Sie speziell $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $u_0 = 5$.

6. Bestimmen Sie alle Punkte der durch $u = +\sqrt{x^2 + y^2}$ gegebenen Fläche F, für welche die Tangentialebene existiert. Skizzieren Sie F.

7. Wie groß wird der absolute bzw. relative Fehler in der Längenbestimmung der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks höchstens, wenn die beiden Katheten der Länge $a = 10$ cm und $b = 15$ cm bis auf 2% bzw. 3% genau gemessen werden ? (**HA**)

8. Die Geschwindigkeit einer chemischen Reaktion wurde bei $T_1 = 300\,K$ und $T_2 = 310K$ gemessen. Man fand $k_1 = 10^{-3}s^{-1}$ und $k_2 = 4 \cdot 10^{-3}s^{-1}$. Für die Temperaturen T_1 und T_2 kann ein maximaler absoluter Fehler von $\pm 0.5\,K$ angenommen werden, für die Geschwindigkeitskonstanten k_1 und k_2 ein maximaler relativer Fehler von 10%. Ermitteln Sie den maximalen relativen Fehler der Aktivierungsenergie E_A mit Hilfe der **Arrenius**'schen Gleichung
$$E_A = E_A(T_1, T_2, k_1, k_2) = R\frac{T_1\,T_2}{T_2 - T_1}\ln\frac{k_2}{k_1} \qquad R \text{ Gaskonstante.}$$

9. Untersuchen Sie die Funktion $u = f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy, \quad a \neq 0$ auf lokale Extrema. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $a > 0$ und $a < 0$.

10. Wie muss die Konstante C gewählt werden, damit die von der Funktion $u = f(x, y) = 89x^2 - 96xy + 61y^2 - 260x + 70y + C$ erzeugte Fläche die xy-Ebene berührt ? (**HA**)

11. Die freie Enthalpie g eines Zweistoffsystems A_1, A_2 nimmt bei der Reaktion im chemischen Gleichgewicht ein Minimum an. Berechnen Sie die Lage des Minimums von
$$g(n_1, n_2) = n_1\left(\mu_1^0 + RT\ln\frac{n_1}{n}\right) + n_2\left(\mu_2^0 + RT\ln\frac{n_2}{n}\right), \quad (0 \leq n_i \leq n, i = 1, 2)$$
(n_i - Stoffmenge der Komponente A_i, μ_i^0 - chemisches Standardpotential, R - Gaskonstante, $T = konst$ - Temperatur). Untersuchen Sie auch $\lim\limits_{n_1 \to 0} g(n_1, n_2)$.

12. Bei der adiabatischen Zustandsänderung eines Gases besteht zwischen der Temperatur T und dem Volumen V die Beziehung $T = kV^{1-\kappa}$ mit positiven Konstanten k und κ. Zur Bestimmung von k und κ wurden für ein spezielles Gas folgende Messpunkte aufgenommen: $(V\,[l], T\,[K]), (1, 400), (2, 303), (3, 258), (4, 230), (5, 210)$. Überführen Sie durch Logarithmieren das Problem auf die Bestimmung einer Ausgleichsgeraden, aus der anschließend k und κ zu ermitteln sind. (**HA**)

13. Ein Ester werde mit Natronlauge verseift. Beide Stoffe mögen dieselbe Ausgangskonzentration $c_0 = 0.025 mol/l$ besitzen. Für die Zeitabhängigkeit der Esterkonzetration $c(t)$ wurde gemessen: $(t\,[min], 10^3 \cdot c\,[\frac{mol}{l}]), (0, 25), (5, 15.53), (10, 11.26), (20, 7.27), (40, 4.25)$. Für die Regressionsansätze $c(t) = c_0\,e^{-kt}$ als Reaktion 1. Ordnung und $\frac{1}{c(t)} = \frac{1}{c_0} + kt$ als Reaktion 2. Ordnung ist jeweils die Reaktionskonstante k zu bestimmen. Welche der beiden Ansätze gibt die Messpunkte besser wieder ?

14. Ein System befinde sich mit der Wahrscheinlichkeit x_i $(0 \leq x_i \leq 1)$ in einem von n verschiedenen Zuständen. Bestimmmen Sie das Maximum der Entropiefunktion $S(x_1, \cdots, x_n) := -k\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \ln x_i$ $(k > 0)$ unter der Nebenbedingung $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. (Da sich das System mit Sicherheit in einem der n Zustände befindet, gilt für die Summe der Wahrscheinlichkeiten $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$.)

15. Welche Punkte der Ellipse $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ haben von $(2, 0)$ extremalen Abstand ?

Hausaufgaben ohne Abgabe und Korrektur. Ihre Bearbeitung wird aber dringend empfohlen. Fragen zu den Hausaufgaben werden in der Konsultation vor der Prüfung geklärt.