CH 1
Mathematik I für Chemiker
Leitung: HSD Dr. Sybille Handrock
Übungsleiter: Dr. Sorin-Mihai Grad Übungsblatt 3
Wintersemester 2006/2007

Anwendungen der Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen

1. Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x^3$ im Punkt $x_0 = 1$ nach der Taylorschen Formel und skizzieren Sie die Funktion und die Näherungspolynome nullten bis dritten Grades.

2. Entwickeln Sie folgende Funktionen nach der Taylorschen Formel bis zum quadratischen Glied und stellen Sie das Restglied in der Form von Lagrange dar:

   a) $f(x) = \sinh x,\ x_0 = 0,$ **(HA)** *b)* $f(x) = (x-a)^3,\ x_0 = b,\ b \in \mathbb{R},$

   c) $f(x) = \exp\left(\frac{x}{a}\right),\ x_0 = a,\ a \neq 0,$ *d)* $f(x) = \ln(1+x),\ x_0 = 0$ **(HA)**.

3. Für welche x ist in den folgenden Näherungsformeln der Fehler kleiner als 10^{-3}.

   a) $\sin x \approx x$ **(HA)**, b) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ **(HA)**, c) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

4. Bilden Sie zu folgenden Funktionen $f(x)$ das Differential $\mathrm{d}f(x_0, \Delta x)$:

   a) $f(x) = 7x^3 - 2x, \quad x_0 = 2,$ *b)* $f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad x_0 = 3,$ **(HA)**

   c) $f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3},$ **(HA)** *d)* $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1$ **(HA)**.

5. Es sei $f(x) = x^3 - 6x$. Bestimmen Sie

   a) Δf, **(HA)** b) $\mathrm{d}f$, **(HA)** c) $\Delta f - \mathrm{d}f$, **(HA)** d) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\Delta x}$, **(HA)**.

6. Der Radius $r = 1.25$ m eines Kreises werde mit einem relativen Fehler von 4% gemessen. Mit welchem absoluten bzw. relativen Fehler ist dann die Kreisfläche behaftet ?

7. Beim Erwärmen einer Kugel mit dem Radius 20 cm wird der Durchmesser um 1 mm größer. Wie groß ist ungefähr die Volumenzunahme ? **(HA)**

8. Berechnen Sie die Grenzwerte (a, b, c seien positive Konstanten)

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \cos x - x}$, *b)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2 - \sin x}{ax^2 + \cos x}$, *c)* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right)$, **(HA)**

   d) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \frac{1}{\tan x}$, *e)* $\lim\limits_{x\to +0} (\sin x)^x$, **(HA)** *f)* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^{-\frac{1}{\cos x}}$, **(HA)**

   g) $\lim\limits_{x\to +0} \left(\frac{1}{\tan x}\right)^{\sin x}$, *h)* $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2 + bx} - x)$, *i)* $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \frac{c}{x}\right)^{c+x}$ **(HA)**.

9. Aus der Reaktionskinetik ist die Arrhenius-Gleichung $k = k(T) = k_0 \exp(-\frac{q}{RT})$ bekannt, die einen Zusammenhang zwischen der absoluten Temperatur und der Reaktionsgeschwindigkeit k herstellt (k_0, q, R positive Konstanten). Bestimmen Sie die erste Ableitung $k'(T)$ und berechnen Sie die Grenzwerte der Funktionen $k(T)$ sowie $k'(T)$ für $T \to +0$ und $T \to +\infty$.

10. Für eine bimolekulare Reaktion A + B $\longrightarrow$ A B gilt

$$x(t) = a\,b\,\frac{\mathrm{e}^{(a-b)kt} - 1}{a\mathrm{e}^{(a-b)kt} - b}.$$

Dabei sei a bzw. b die zu Beginn der Reaktion vorhandene Anzahl der Moleküle vom Typ A bzw. B, $k > 0$ ist die Geschwindigkeitskonstante der Reaktion und $x = x(t)$ sei die Anzahl der nach Ablauf der Reaktionszeit t bei der Reaktion "verbrauchten" Moleküle. Berechnen Sie $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ für die Fälle $a < b, \quad a > b, \quad a = b$. und interpretieren Sie das Ergebnis.

11. Eine Punktmasse schwingt im Intervall $t \in [0, \pi]$ nach dem Weg-Zeit-Gesetz $s(t) = s_0 \mathrm{e}^{\sin t}$ mit einer Anfangslage $s_0 > 0$. Wann wird die Geschwindigkeit im vorgegebenen Zeitintervall maximal bzw. minimal? Geben Sie die maximale und die minimale Geschwindigkeit zu diesen Zeitpunkten an.

12. Bei einer zweistufigen reversiblen adiabatischen Gaskompression vom Anfangsdruck p_1 bis zum Enddruck $p_2 > p_1$ ist die Arbeit durch

$$W(p) = nRT\frac{\kappa}{\kappa - 1}\left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 2 + \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]$$

gegeben (n, R, T, κ positive Konstanten, $\kappa > 1$). Bestimmen Sie p derart, dass $W(p)$ möglichst niedrig wird.

13. Berechnen Sie die Wendepunkte der Funktion $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}x^2 + \sin x, \quad D(f) =]-\infty, +\infty[$. **(HA)**

14. Untersuchen Sie die Gauß-Funktion $f(x) = A \cdot \exp(-a(x - x_0)^2), \quad a > 0,\ A > 0$ auf Symmetrie, Nullstellen, relative Extremwerte, Wendepunkte, Asymptoten und berechnen Sie die Halbwertsbreite dieser Kurve. (Die Halbwertsbreite Δx ist gleich dem Abstand der beiden Punkte, in denen der Funktionswert halb so groß ist wie im Maximum.)

15. Berechnen Sie für das *Morse-Potenzial* (vgl. Vorlesungsskript S. 19) die Entwicklung nach der Taylorschen Formel an der Stelle $r = r_0$ bis zur 5. Potenz von $(r - r_0)$ sowie die Schnittpunkte mit den Achsen, lokale Extremwerte und Wendepunkte. **(HA)**

16. Berechnen Sie, falls vorhanden, Nullstellen, Pole, Asymptoten und relative Extremwerte der Funktionen

a) $f(x) = \frac{|1+x|}{x} \quad D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ b) $f(x) = \frac{x}{|1+x|} \quad D(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Abgabetermin für die Hausaufgaben: 19.01.2007