CH 1
Mathematik I für Chemiker
Leitung: HSD Dr. Sybille Handrock
Übungsblatt 2
Wintersemester 2006/2007

Grenzwerte und Stetigkeit reeller Funktionen einer reellen Variablen

1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$a)\quad \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\quad b)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}\quad c)\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

2. Berechnen Sie Grenzwerte der Funktion $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ für $x\to 0$, $x\to 1$, $x\to\infty$ und skizzieren Sie den Funktionsverlauf. **(HA)**

3. Berechnen Sie die einseitigen Grenzwerte der Funktion an der Stelle $c=0$:

$$a)\quad f(x)=\frac{|x|}{x},\ \textbf{(HA)}\qquad\qquad b)\quad f(x)=\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

   Existieren auch die Grenzwerte?

4. Ermitteln Sie die Unstetigkeitsstellen folgender Funktionen:

$$a)\quad f(x)=[x]=z\quad \text{für } x=z+q,\ z\in\mathbb{Z}\wedge 0\le q<1\quad b)\quad f(x)=x-[x].\ \textbf{(HA)}$$

Grenzwerte und Stetigkeit reeller Funktionen mehrerer reeller Variablen

1. Geben Sie für die folgenden reellwertigen Funktionen $u=f(x,y)$ den größtmöglichen Definitionsbereich an und skizzieren Sie ihn:

   a) $u=\sqrt{x^2+y^2-16}$, **(HA)** b) $u=\ln(y-x^2)$,

   c) $u=\dfrac{x^4(\sin x+4y)}{x^2+y^2}$, **(HA)** d) $u=\dfrac{e^x(4x+5y^2)}{(x-y/2)(x^2-1)}$.

2. Skizzieren Sie ein Höhenlinienbild folgender Funktionen $u=f(x,y)$ und schließen Sie daraus auf die Gestalt der durch f bestimmten Fläche im $\mathbb{R}^3$:

   a) $u=(x^2+y^2)^{-1}$, b) $u=x+2y+3$, **(HA)**

   c) $u=4-2x^2-y^2$, **(HA)** d) $u=(x-y+1)^2$.

3. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$, **(HA)** b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,1)}\frac{-x^2+4xy+10}{x^2-xy+y^3}$.

4. Geben Sie die Menge der Unstetigkeitsstellen folgender Funktionen an:

a) $u = \sin \dfrac{x^2-2}{x(y+1)}$, b) $u = \mathrm{e}^{y/(x^2-1)}$, (**HA**)

c) $u = \dfrac{2x^2(x+y)}{(x-4y)(x^2+y^2)}$, d) $u = \dfrac{x^2+y^2}{\cos x - 1}$. (**HA**)

Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen

1. Berechnen Sie in den Punkten, in denen sie existiert, die 1. Ableitung:

   a) $f(x) = \ln \sin x$, *b)* $f(x) = \mathrm{e}^{x^3} - (\mathrm{e}^x)^3$, *c)* $f(x) = \ln|\cos x|$. (**HA**)

2. Sei $u(x) > 0$. Berechnen Sie die 1. Ableitung:

   a) $f(x) = u(x)^{v(x)}$, *b)* $f(x) = \sqrt[x]{x}$, *c)* $f(x) = (2x)^{\sin x}$. (**HA**)

3. Skizzieren Sie die Funktion

   $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für} \quad x \in [0,1] \\ -\sqrt{1-(x-2)^2} & \text{für} \quad x \in [1,2]. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass $f(x)$ an der Stelle $c = 1$ eine uneigentliche Ableitung $f'(1) = -\infty$ besitzt.

4. Bestimmen Sie die Tangentengleichung zur Funktion $f(x) = \dfrac{3x+1}{1+x^2}$ im Punkt $(1,2)$.

5. In welchem Punkt ist die Tangente an die Parabel $f(x) = x^2 - 2x + 5$ zu legen, damit sie auf der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten senkrecht steht? Wie lautet die Gleichung der Tangente? (**HA**)

6. Wie ist die reelle Zahl a zu wählen, damit die Funktion $f(x) = \dfrac{ax}{1+bx^2}$, $b > 0$ die x-Achse unter einem Winkel von $45°$ schneidet? (**HA**)

7. Bilden Sie die n-te Ableitung von

   a) $f(x) = \ln x$, (**HA**) *b)* $f(x) = \sin x$, *c)* $f(x) = (ax+b)^m$.

8. Geben Sie die Zusammenhänge zwischen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung für die geradlinige, gleichförmige sowie die geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung an.

9. Die Gleichung für die harmonische Pendelbewegung lautet: $s = s_0 \sin \omega t$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a für das Pendel. Welcher Zusammenhang besteht zwischen s und a?

10. Ein Körper legt unter Einwirkung der Erdbeschleunigung g und einer Reibungskraft $R = bv^2$ in der Zeit t den Weg

    $$x(t) = x_0 + \frac{1}{d^2 g} \ln \frac{\cosh(\,\mathrm{artanh}\,(d\,v_0) + dgt)}{\cosh(\,\mathrm{artanh}\,(d\,v_0))}$$

    zurück. Dabei ist x_0 die Anfangslage des Körpers, v die Geschwindigkeit, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, $b > 0$ die Reibungskonstante und $d^2 = \dfrac{b}{mg}$ (m Masse des Körpers). Berechnen Sie die Beschleunigung des Körpers.

Abgabetermin für die Hausaufgaben: 12.12.2006