CH 1
Übungen Mathematik I für Chemiker
Leitung: HSD Dr. Sybille Handrock
Übungsblatt 1
Wintersemester 2006/2007

Komplexe Zahlen

1. Berechnen Sie $z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \overline{z_2} \cdot z_1,\ \overline{z_2} \cdot z_2$ für

   $a)\quad z_1 = 4 - \mathrm{i}\,5,\ \ z_2 = 4 + \mathrm{i}\,5, \qquad b)\quad z_1 = \mathrm{i},\ \ z_2 = -2 - \mathrm{i}\,4$ **(HA)**,

   $c)\quad z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3},\ \ z_2 = 1 - \mathrm{i}$ **(HA)**, $\quad d)\quad z_1 = 7 + \mathrm{i}\,6,\ \ z_2 = 2 + \mathrm{i}\,5.$

2. Berechnen Sie $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ und $|z|$ von

   $a)\quad z = \dfrac{1}{1+\mathrm{i}}, \qquad b)\quad z = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2$ **(HA)**, $\qquad c)\quad z = (1+\mathrm{i})^4$ **(HA)**.

3. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar:

   $a)\quad z = 1 + \mathrm{i}, \qquad b)\quad z = -7, \qquad c)\quad z = 5$ **(HA)**,

   $d)\quad z = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad e)\quad z = \mathrm{i} + \dfrac{1+\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}$ **(HA)**, $\qquad f)\quad z = (2+\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\pi/6}.$

4. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer und algebraischer Form dar:

   $a)\quad z = (1-\mathrm{i})^6, \qquad b)\quad z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3\pi}, \qquad c)\quad z = \mathrm{e}^{1+\mathrm{i}\,3\pi}$ **(HA)**,

   $d)\quad z = 2^{2+\mathrm{i}\,3}, \qquad e)\quad z = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi}$ **(HA)**, $\qquad f)\quad z = (3+\mathrm{i}\,4)^{1+\mathrm{i}}.$

5. Berechnen Sie alle Wurzeln folgender komplexer Zahlen und stellen Sie diese grafisch dar:

   $a)\quad \sqrt[5]{1}, \qquad b)\quad \sqrt[3]{-1}$ **(HA)**, $\qquad c)\quad \sqrt{1+\mathrm{i}},$

   $d)\quad \sqrt[4]{\mathrm{i}}, \qquad e)\quad \sqrt{-\mathrm{i}}$ **(HA)**, $\qquad f)\quad \sqrt[4]{\dfrac{1}{2}(\mathrm{i}\,\sqrt{3}-1)}.$

6. Berechnen Sie die Hauptwerte der Logarithmen folgender komplexer Zahlen:

   $a)\quad \ln(1+\mathrm{i}), \qquad b)\quad \ln(3+\mathrm{i}4)$ **(HA)**, $\qquad c)\quad \ln(\mathrm{i}).$

7. Lösen Sie folgende Gleichungen:

   $a)\quad \mathrm{i}\,z + 5 - \mathrm{i} = 0, \qquad b)\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}z + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = 0,$

   $c)\quad \sqrt{\mathrm{i}}\,z + \mathrm{i} = 0,$ **(HA)**, $\qquad d)\quad z^2 - \mathrm{i}\,2z + 8 = 0,$

   $e)\quad z^2(1+\mathrm{i}) = 2z$ **(HA)**, $\qquad f)\quad z^2 - z + \mathrm{i}\,z - \mathrm{i} = 0,$

   $g)\quad z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5 = 0, \qquad h)\quad (z - \mathrm{i}\,3)^6 + 64 = 0.$

8. Welche quadratischen Gleichungen besitzen die folgenden Lösungen:

$$a) \quad z_1 = 3 + \mathrm{i}, \ \ z_2 = 3 - \mathrm{i}, \quad b) \quad z_1 = 4 + \mathrm{i}, \ \ z_2 = \mathrm{i} \ (\mathbf{HA})\,?$$

9. Der (komplexe) Scheinwiderstand Z einer Wechselstromschaltung, in der ein Widerstand (R) eine Spule (L) und ein Kondensator (C) in Reihe geschalten sind, ist gegeben durch $Z = R + \mathrm{i}\omega L + \dfrac{1}{\mathrm{i}\omega C}$. Berechnen Sie Re Z, Im Z, $|Z|$ und arg Z.

Eigenschaften reeller Funktionen einer reellen Variablen

1. Für welche reellen x gilt

   $a) \quad x^2 \leq 9, \qquad b) \quad |x| > \pi \qquad c) \quad |x-2| < 1 \ (\mathbf{HA}),$

   $d) \quad |x+1| \geq 4, \qquad e) \quad |2x+1| = |x+1| + 1, \qquad f) \quad \ln|x+4| > 1?\ (\mathbf{HA})$

2. Ermitteln Sie $D(f)$ und $W(f)$ für folgende Funktionen und skizzieren Sie den Graphen von f

   $a) \quad f(x) = \sqrt{9-x^2}, \qquad b) \quad f(x) = \sqrt{-x} + \sqrt{4+x} \ (\mathbf{HA}),$

   $c) \quad f(x) = |x-2| + 1, \qquad d) \quad f(x) = x + |x| \ (\mathbf{HA}),$

   $e) \quad f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}, \qquad f) \quad f(x) = \ln(1-x^2) \ (\mathbf{HA}),$

   $g) \quad f(x) = \ln|\cos x|, \qquad h) \quad f(x) = \ln\cos x \ (\mathbf{HA}),$

   $i) \quad f(x) = \ln\sin x, \qquad j) \quad f(x) = \sin\ln x.$

3. Bestimmen Sie zu folgende Funktionen $f(x)$ die Umkehrfunktion, falls diese existiert, und skizzieren Sie die Graphen von f und f^{-1}

   $a) \quad f(x) = 3x + 1, \qquad b) \quad f(x) = 3\,\mathrm{e}^{4\,x} \ (\mathbf{HA}),$

   $c) \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für} \quad x \leq 0 \\ 4x & \text{für} \quad x > 0, \end{cases} \qquad d) \quad f(x) = \dfrac{1}{x-1} \ (\mathbf{HA}).$

4. Welche der folgenden Funktionen (bei maximal möglichem Definitionsbereich) ist gerade, welche ist ungerade und welche besitzt keine dieser Eigenschaften?

   $a) \quad f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}, \quad b) \quad f(x) = (x+2)^2 \ (\mathbf{HA}), \quad c) \quad f(x) = x(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}) \ (\mathbf{HA}).$

5. Stickstoffpentoxid N_2O_5 zerfällt unimolekular nach dem Gesetz $N(t) = N_0\mathrm{e}^{-kt}$, wobei $N(t)$ die Konzentration von N_2O_5 zur Zeit t, $N_0 = N(0)$ und k die Zerfallskonstante ($k = 8.05 \cdot 10^{-5}\mathrm{sec}^{-1}$) ist. Wie lange dauert es, bis die Konzentration auf 1% der Ausgangskonzentration gesunken ist?

6. Geben Sie die Partialbruchzerlegung an

$$a) \quad f(x) = \frac{x^2}{(x^2-4)(x+1)} \ (\mathbf{HA}) \qquad b) \quad f(x) = \frac{x-2}{x^3 - 3\,x^2 + 4\,x - 2}.$$

Abgabetermin für die Hausaufgaben: 21.11.2006