Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

03. Dezember 2008

Höhere Mathematik II für den Bachelorstudiengang Automobilproduktion

Übung 7: Lineare Systeme erster Ordnung I

1. Wir betrachten eine chemische Reaktion, bei der ein Stoff A in den Stoff B und dieser in den Stoff C umgewandelt wird

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C.$$

Dabei sind k_1 und k_2 Reaktionskonstanten, die ein Maß für die Reaktionsgeschwindigkeiten darstellen. Die jeweils vorhandene Menge der Stoffe A, B, C, bezeichnen wir mit y_1, y_2, y_3 entsprechend. Dann sind die Zunahmen bzw. Abnahmen dieser Mengen (Konzentrationsänderungen) pro Zeiteinheit gegeben durch $y_1'(t), y_2'(t), y_3'(t)$. Für diese Änderungen gilt in vielen Fällen ein linearer Ansatz

$$\begin{array}{rcrlrl} y_1'(t) & = & - & k_1\ y_1(t) & & \\ y_2'(t) & = & & k_1\ y_1(t) & - & k_2\ y_2(t) \\ y_3'(t) & = & & & + & k_2\ y_2(t) \end{array} .$$

Die erste Gleichung besagt, dass die Abnahme der Stoffmenge A proportional der noch insgesamt vorhandenen Menge A ist. Die zweite Gleichung beinhaltet, dass die Konzentrationsänderung der Stoffmenge B gegeben ist durch die Umwandlung von A in B abzüglich der sich in C umwandelnden Stoffmenge B, die proportional zu $y_2(t)$ angesetzt wird. Die Zunahme von C pro Zeiteinheit ist schließlich durch die Abnahme von B gegeben. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gelte: Die Menge an Substanz A sei gleich M_0, von den Substanzen B und C sei nichts vorhanden, es gilt also

$$y_1(0) = M_0, \qquad y_2(0) = 0, \qquad y_3(0) = 0.$$

Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems für $k_1 \neq k_2$ und $k_1 = k_2$.

2. Geben Sie die allgemeine Lösung des folgenden Systems an

$$\begin{array}{rcrcrl} y_1' & = & -\ y_1 & + & 2y_2 & \\ y_2' & = & -\ 3y_1 & + & 4y_2 & + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{array} .$$

Technische Universität Chemnitz 10. Dezember 2008
Fakultät für Mathematik

Höhere Mathematik II für den Bachelorstudiengang Automobilproduktion

Übung 8: Lineare Systeme erster Ordnung II

1. Die Bewegung eines Massenpunktes im Raum genüge dem linearen System

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & & - & y_2 & + & y_3 \\ y_2' & = & y_1 & & & - & y_3 \\ y_3' & = & -y_1 & + & y_2 & & \end{array} .$$

   Ermitteln Sie die Bahnkurve, die den Anfangsbedingungen $y_1(0) = y_1^0$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 0$ entspricht.

2. Geben Sie für das lineare homogene System

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & 2y_1 & - & y_2 & - & y_3 \\ y_2' & = & 2y_1 & - & y_2 & - & 2y_3 \\ y_3' & = & -y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 \end{array} .$$

   ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung an.