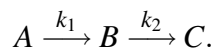


Höhere Mathematik II für den Bachelorstudiengang Automobilproduktion

Übung 7: Lineare Systeme erster Ordnung I

1. Wir betrachten eine chemische Reaktion, bei der ein Stoff A in den Stoff B und dieser in den Stoff C umgewandelt wird



Dabei sind k_1 und k_2 Reaktionskonstanten, die ein Maß für die Reaktionsgeschwindigkeiten darstellen. Die jeweils vorhandene Menge der Stoffe A , B , C , bezeichnen wir mit y_1, y_2, y_3 entsprechend. Dann sind die Zunahmen bzw. Abnahmen dieser Mengen (Konzentrationsänderungen) pro Zeiteinheit gegeben durch $y_1'(t), y_2'(t), y_3'(t)$. Für diese Änderungen gilt in vielen Fällen ein linearer Ansatz

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -k_1 y_1(t) \\ y_2'(t) &= k_1 y_1(t) - k_2 y_2(t) \\ y_3'(t) &= k_2 y_2(t) \end{aligned}$$

Die erste Gleichung besagt, dass die Abnahme der Stoffmenge A proportional der noch insgesamt vorhandenen Menge A ist. Die zweite Gleichung beinhaltet, dass die Konzentrationsänderung der Stoffmenge B gegeben ist durch die Umwandlung von A in B abzüglich der sich in C umwandelnden Stoffmenge B , die proportional zu $y_2(t)$ angesetzt wird. Die Zunahme von C pro Zeiteinheit ist schließlich durch die Abnahme von B gegeben. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gelte: Die Menge an Substanz A sei gleich M_0 , von den Substanzen B und C sei nichts vorhanden, es gilt also

$$y_1(0) = M_0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 0.$$

Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems für $k_1 \neq k_2$ und $k_1 = k_2$.

2. Geben Sie die allgemeine Lösung des folgenden Systems an

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -3y_1 + 4y_2 + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1} \end{aligned}$$

Höhere Mathematik II für den Bachelorstudiengang Automobilproduktion

Übung 8: Lineare Systeme erster Ordnung II

1. Die Bewegung eines Massenpunktes im Raum genüge dem linearen System

$$\begin{aligned}y_1' &= -y_2 + y_3 \\y_2' &= y_1 - y_3 \\y_3' &= -y_1 + y_2\end{aligned}$$

Ermitteln Sie die Bahnkurve, die den Anfangsbedingungen $y_1(0) = y_1^0$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 0$ entspricht.

2. Geben Sie für das lineare homogene System

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 - y_2 - y_3 \\y_2' &= 2y_1 - y_2 - 2y_3 \\y_3' &= -y_1 + y_2 + 2y_3\end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung an.