Hausaufgabe 5: Wahrscheinlichkeiten

Lösungen

1. Zu zwei beliebigen Zeitpunkten des Zeitabschnittes T sollen in einem Empfänger gleichwahrscheinlich Signale ertönen. Das Gerät trennt nicht mehr, wenn die Zeitdifferenz zwischen den Signalen kleiner als τ ausfällt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Gerät für den Empfang unbrauchbar ist.

   Lösung: (6 Punkte)

   Das Problem lässt sich mit der Definition der geometrischen Wahrscheinlichkeit lösen. Wir bezeichnen mit A das Ereignis, dass das Gerät unbauchbar ist und mit x und y die Zeitpunkte, zu denen die Signale empfangen werden. Die Versuchsergebnisse können somit durch die Zahlenpaare (x,y) dargestellt werden. Die Menge aller Versuchsergebnisse (aller Elementarereignisse) fällt folglich mit einem Quadrat Q der Seitenlänge T zusammen.

   Das Gerät ist unbrauchbar, wenn $|x-y| < \tau$ gilt. Auflösung der Ungleichung liefert

   $$-\tau < x-y < \tau \Longleftrightarrow -\tau < x-y \wedge x-y < \tau \Longleftrightarrow y < x+\tau \wedge y > x-\tau.$$

   Das dadurch gegebene Gebiet G liegt also innerhalb des Quadrates zwischen den Geraden $y = x+\tau$ und $y = x-\tau$.

   Annahme: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Versuchsergebnisse im Inneren einer geometrischen Figur D liegen, ist proportional zum Flächeninhalt $F(D)$ dieser Figur. Mit $F(Q) = T^2$ erhält man für den Flächeninhalt von G

   $$F(G) = T^2 - 2\frac{(T-\tau)^2}{2} = T^2 - (T-\tau)^2.$$

   Dann ist

   $$P(A) = \frac{F(G)}{F(Q)} = \frac{T^2-(T-\tau)^2}{T^2} = 1 - \left(1-\frac{\tau}{T}\right)^2 = 2\frac{\tau}{T} - \frac{\tau^2}{T^2}.$$

2. In einem Unternehmen wird ein Werkstück auf drei verschiedenen Maschinen M_1, M_2, M_3 produziert. Die folgende Tabelle gibt für jede Maschine den Anteil an der Gesamtproduktion sowie den Ausschussanteil an:

Maschine	Anteil an der Gesamtproduktion	Ausschussanteil
M_1	20%	3%
M_2	40%	2%
M_3	40%	1%

   Aus der Gesamtproduktion wird zufällig ein Werkstück entnommen.

   Berechnen Sie

   a) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das entnommene Teil ein Ausschussteil ist,

   b) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das entnommene Teil auf der Maschine M_1 bzw. M_2 bzw. M_3 gefertigt wurde unter der Bedingung, dass es ein Ausschussteil ist,

   c) Welche Beziehung gilt für die unter b) berechneten Wahrscheinlichkeiten?

   Lösung: (13 Punkte)

   a) Wir definieren folgende Ereignisse:

   A_1 - Das gezogene Teil wurde auf Maschine M_1 gefertigt.

A_2 - Das gezogene Teil wurde auf Maschine M_2 gefertigt.

A_3 - Das gezogene Teil wurde auf Maschine M_3 gefertigt.

B - Das gezogene Teil ist ein Ausschussteil

und berechnen die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse:

$$P(A_1) = \frac{20}{100} = 0.2, \qquad P(A_2) = \frac{40}{100} = 0.4, \qquad P(A_3) = \frac{40}{100} = 0.4.$$

Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $B|A_i$, $(i = 1,2,3)$ (d.h. ein Ausschussteil aus der Produktion der i-ten Maschine zu erhalten) sind

$$P(B|A_1) = 0.03, \qquad P(B|A_2) = 0.02, \qquad P(B|A_3) = 0.01.$$

Weiter gilt:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i, j = 1,2,3), \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 = E,$$

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1, \quad P(A_i) > 0 \quad \forall\, i,$$

d.h., die Voraussetzungen zur Anwendung des Satzes über die totale Wahrscheinlichkeit sind erfüllt. Für die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ ein Ausschussteil zu ziehen, gilt:

$$\begin{aligned} P(B) &= P((B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup(B\cap A_3) = P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2) + P(B\cap A_3) \\ &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\ &= 0.2\cdot 0.03 + 0.4\cdot 0.02 + 0.4\cdot 0.01 = 0.018. \end{aligned}$$

b) Die Voraussetzungen zur Anwendung der Bayesschen Formel sind erfüllt (siehe a)). Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass das gezogene Stück auf der i-ten Maschine produziert wurde unter der Bedingung, dass es ein Ausschussteil ist

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.2\cdot 0.03}{0.018} = 0.3\bar{3} \\ P(A_2|B) &= \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.4\cdot 0.02}{0.018} = 0.4\bar{4} \\ P(A_3|B) &= \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0.4\cdot 0.01}{0.018} = 0.2\bar{2}. \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\sum_{i=1}^{3} P(A_i|B) = 0.3\bar{3} + 0.4\bar{4} + 0.2\bar{2} = 0.9\bar{9}.$$

3. In einem Betrieb seien 95% der Erzeugnisse verwendungsfähig. Davon gehören 80% zur Güteklasse I. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Erzeugnis zur Güteklasse I gehört?

   Lösung: (5 Punkte)

   Wir definieren folgende Ereignisse:

   A - Das Produkt ist verwendungsfähig.

   B - Das Produkt gehört zur Güteklasse I.

   Dann gilt: $P(A) = 0.95$ und $P(B|A) = 0.80$. Wegen $B \subset A$ ist $B \cap A = B$ und damit $P(B) = P(B\cap A) = P(A)\cdot P(B|A) = 0.95\cdot 0.80 = 0.76.$

4. Zwei Schützen schießen unbeeinflusst voneinander auf eine Zielscheibe. Der erste trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.7, der zweite mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass **mindestens** einer der Schützen die Zielscheibe trifft?

   Lösung: (7 Punkte)

   Wir definieren folgende Ereignisse:

   A - der erste Schütze trifft das Ziel,

   B - der zweite Schütze trifft das Ziel,

   C - mindestens ein Schütze trifft das Ziel.

   Gegeben: $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.8$. Gesucht: $P(C)$.

   Wegen $C = A \cup B$ und $A \cap B \neq \emptyset$ gilt der Additionssatz für nicht unvereinbare Ereignisse (Skript Formel (4.1)):

   $$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

   Da die Ereignisse A und B unabhängig voneinander sind, gilt der Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse (Skript Formel (4.5)):

   $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

   Somit erhält man

   $$P(C) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0.7 + 0.8 - 0.7 \cdot 0.8 = 0.94.$$

5. In einem Behälter sind fünf Kugeln mit den Zahlen 1 bis 5. Es werden gleichtzeitig zwei Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit unter diesen zwei Kugeln diejenigen mit der Eins **oder** Zwei zu ziehen?

   Lösung: (5 Punkte)

   !. Lösungsweg: Wir definieren folgende Ereignisse:

   A - beim einmaligen Ziehen zweier Kugeln diejenige mit der Eins zu ziehen,

   B - beim einmaligen Ziehen zweier Kugeln diejenige mit der Zwei zu ziehen,

   $A \cup B$ - beim einmaligen Ziehen zweier Kugeln diejenigen mit der Eins oder Zwei zu ziehen,

   $A \cap B \neq \emptyset$ - beim einmaligen Ziehen zweier Kugeln diejenigen mit der Eins und Zwei zu ziehen.

   Aus der Aufgabenstellung folgt: $P(A) = \frac{4}{10}$, $P(B) = \frac{4}{10}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$. Also gilt der Additionssatz für nicht unvereinbare Ereignisse (Skript Formel (4.1)):

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{10} + \frac{4}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}.$$

   !. Lösungsweg: Die Aufgabe führt auf Kombinationen ohne Wiederholung: $C_{n,k} = \binom{n}{k} \Longrightarrow C_{5,2} = \binom{5}{2} = 10.$

   $$\begin{array}{llll} 12 & & & \\ 13 & 23 & & \\ 14 & 24 & 34 & \\ 15 & 25 & 35 & 45 \end{array}$$

   Es gibt also 7 Kombinationen, eine Eins oder eine Zwei zu ziehen, somit ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignises gleich $\frac{7}{10}$.