Hausaufgabe 4: Kombinatorik

Lösungen

Geben Sie für jede Aufgabe außer der Lösung das zugrundliegende kombinatorische Problem an!

1. Die Studenten A,B,C,D,E wollen sich im Kino derart setzen dass C,D,E in dieser Reihenfolge nebeneinander sitzen, während A und B die restlichen 2 der 5 reservierten Plätze einnehmen. Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es?

   Lösung: (5 Punkte)

   Die Aufgabe führt auf Permutationen ohne Wiederholung.

   Begründung: Die Buchstabenkombination CDE ist als ein Element zu betrachten, das mit den anderen beiden Elementen permutiert wird.

   Wir setzen $CDE = F$. Also gibt es $P_3 = 3! = 6$ Möglichkeiten. Diese sind:

   $$ABF \quad BAF \quad AFB \quad BFA \quad FAB \quad FBA.$$

2. Wie viele verschiedene siebenstellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern $1,1,2,2,2,3,3$ bilden? Wie viele und welche verschiedenen dreistelligen Zahlen lassen sich aus den Ziffern $2,2,3$ bilden?

   Lösung: (5 Punkte)

   Die Aufgabe führt auf Permutationen mit Wiederholung.

   Begründung: Die $n = 7$ Elemente lassen sich in $k = 3$ Klassen einteilen, bzw. die $n = 3$ Elemente lassen sich in $k = 2$ Klassen einteilen.

   Aus den Ziffern $1,1,2,2,2,3,3$ lassen sich

   $$P_{7,2,3,2} = \frac{7!}{2!3!2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2} = 210$$

   verschiedene siebenstellige Zahlen bilden.

   Aus den Ziffern $2,2,3$ lassen sich $P_{3,2,1} = \dfrac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$ verschiedene dreistellige Zahlen bilden und zwar $223,\ 232,\ 322$.

3. Wie viele und welche zweistellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern $1,2,3,4$ bilden?

   Lösung: (4 Punkte)

   Die Aufgabe führt auf Variationen ohne Wiederholung.

   Begründung: Aus $n = 4$ Ziffern werden $k = 2$ ausgewählt, wobei die Anordnung der beiden ausgewählten Ziffern eine Rolle spielt. Die ausgewählten Ziffern werden nicht zurückgelegt.

   Die Anzahl der zweistelligen Zahlen, die sich aus den Ziffern $1,2,3,4$ bilden lassen, beträgt $V_{4,2} = \dfrac{4!}{2!} = 12$.

   Das sind die Zahlen

   $$12,\,13,\,14,\quad 21,\,23,\,24,\quad 31,\,32,\,34,\quad 41,\,42,\,43.$$

   .

4. Beim Morsen werden zwei Zeichen verwendet. Wie viele Buchstaben kann man mit ihnen darstellen, wenn mindestens zwei und höchstens vier Zeichen, die sich wiederholen dürfen, für einen Buchstaben verwendet werden?

   Lösung: (6 Punkte)

   Die Aufgabe führt auf Variationen mit Wiederholung.

   Begründung: Aus $n = 2$ Zeichen sind Buchstaben aus $k = 2$, $k = 3$ oder $k = 4$ Zeichen möglich, wobei die Reihenfolge der Zeichen eine Rolle spielt und die Zeichen wie beim Zurücklegen immer wieder verwendbar sind.

   Wegen $V_{n,k}^W = n^k$ gilt

   für Buchstaben aus zwei Zeichen $V_{2,2}^W = 2^2$,

   für Buchstaben aus drei Zeichen $V_{2,3}^W = 2^3$,

   für Buchstaben aus vier Zeichen $V_{2,4}^W = 2^4$.

   Insgesamt erhält man

   $$V = V_{2,2}^W + V_{2,3}^W + V_{2,4}^W = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 28$$

   Variationen. Das Morsealphabet enthält also 28 Buchstaben.

5. Auf einer Kreislinie liegen fünf verschiedene Punkte. Wie viele Sehnen dieses Kreises, die die vorgegebenen Punkte als Randpunkte besitzen, gibt es?

   Lösung: (5 Punkte)

   Die Aufgabe führt auf Kombinationen ohne Wiederholung.

   Begründung: Aus einer fünfelementigen Menge sind alle möglichen zweielementigen Teilmengen auszuwählen, wobei die Anordnung der beiden Elemente keine Rolle spielt (beide Randpunkte der Sehne sind gleichberechtigt). Ein ausgewählter Punkt kann nicht nochmal gewählt werden (kein Zurücklegen).

   Es gibt $C_{5,2} = \binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten.

6. Wie viele Möglichkeiten für die Kombination von Augenzahlen gibt es beim Würfeln mit drei gleichfarbigen Würfeln?

   Lösung: (5 Punkte)

   Die Aufgabe führt auf Kombinationen mit Wiederholung.

   Begründung: Die $n = 6$ verschiedenen Augenzahlen eines Würfels werden durch $k = 3$ gleichfarbige Würfel erzeugt. Dabei spielt die Reihenfolge, in welcher die Würfel geworfen werden, keine Rolle. Gleiche Augenzahlen für alle drei Würfel sind möglich (wie beim Zurücklegen).

   Dann ergeben sich

   $$C_{n,k}^W = \binom{n+k-1}{k} = C_{6,3}^W = \binom{8}{3} = 56.$$

   Möglichkeiten für die Kombination von Augenzahlen beim Würfeln mit drei gleichfarbigen Würfeln.