

Hausaufgabe 3: Lineare Systeme erster Ordnung**Lösungen**

1. Geben Sie die allgemeine Lösung des folgenden Systems an

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + \tan^2 t - 1 \\ y_2' &= -y_1 + \tan t \end{aligned}$$

Lösung: (12 Punkte)

Berechnung der Eigenwerte

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda_{1/2} = \pm i.$$

Berechnung eines komplexen Eigenvektors und einer komplexen Lösung

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}_2) \mathbf{u}^1 = \mathbf{0} \implies \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix besitzt den Rang 1. Damit ist eine Variable des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -i u_{11} + u_{21} &= 0 \\ -u_{11} - i u_{21} &= 0 \end{aligned}$$

frei wählbar. Setzt man $u_{11} = 1$, so erhält man $u_{21} = i$ und den komplexen Eigenvektor

$$\mathbf{u}^1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \implies \mathbf{u}^1 = \mathbf{x}^1 + i \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\mathbf{z}^1(t) = \mathbf{u}^1 e^{it} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) (\cos t + i \sin t)$$

eine komplexe Lösung des Systems.

Aufstellen eines Fundamentalsystems und der allgemeinen Lösung

$$\mathbf{y}^1(t) = \operatorname{Re} \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t$$

$$\mathbf{y}^2(t) = \operatorname{Im} \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t$$

$$\mathbf{y}_a^h(t) = C_1 \mathbf{y}^1(t) + C_2 \mathbf{y}^2(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Konstantenvariation

a) Ansatz: $\mathbf{y}_s^{inh}(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t \\ -C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t \end{pmatrix}$

b) Aufstellen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t &= \tan^2 t - 1 \\ -C_1'(t) \sin t + C_2'(t) \cos t &= \tan t \end{aligned}$$

c) Lösung des linearen Gleichungssystems

Multiplikation der ersten Gleichung mit $\sin t$, der zweiten Gleichung mit $\cos t$ und Addition beider Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} C_2'(t) &= \sin t (\tan^2 t - 1) + \tan t \cos t = \sin t (\tan^2 t - 1) + \sin t \\ &= \sin t \tan^2 t = \sin t \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \sin t \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin t}{\cos^2 t} - \sin t \end{aligned}$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in die zweite Gleichung ergibt

$$C_1'(t) = -\cos t$$

d) Integration

$$C_1(t) = -\sin t, \quad C_2(t) = \frac{1}{\cos t} + \cos t.$$

Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_s^{inh}(t) &= \begin{pmatrix} C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t \\ -C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin t \cos t + \left(\frac{1}{\cos t} + \cos t \right) \sin t \\ \sin^2 t + \left(\frac{1}{\cos t} + \cos t \right) \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan t \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung

$$\mathbf{y}_a^{inh}(t) = \mathbf{y}_a^h(t) + \mathbf{y}_s^{inh}(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tan t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Lösen Sie das lineare System

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 8y_2 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

Lösung: (7 Punkte)

Berechnung der Eigenwerte

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} (-1 - \lambda) & 8 \\ 1 & (1 - \lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0 \implies \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -3.$$

Berechnung des Eigenvektors und des Lösungsvektors zu $\lambda_1 = 3$

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}_2) \mathbf{x}^1 = \mathbf{0} \implies \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix besitzt den Rang 1. Damit ist eine Variable des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -4 x_{11} + 8 x_{21} &= 0 \\ 1 x_{11} - 2 x_{21} &= 0 \end{aligned}$$

frei wählbar. Setzt man $x_{11} = 2$, so erhält man $x_{21} = 1$ und den Eigen- bzw. Lösungsvektor.

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \mathbf{y}^1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Berechnung des Eigenvektors und des Lösungsvektors zu $\lambda_2 = -3$

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}_2) \mathbf{x}^2 = \mathbf{0} \implies \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix besitzt den Rang 1. Damit ist eine Variable des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_{12} + 8x_{22} &= 0 \\ 1x_{12} + 4x_{22} &= 0 \end{aligned}$$

frei wählbar. Setzt man $x_{12} = 4$, so erhält man $x_{22} = -1$ und den Eigen- bzw. Lösungsvektor.

$$\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \mathbf{y}^2(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

Allgemeine Lösung

$$\mathbf{y}_a^h(t) = C_1 \mathbf{y}^1(t) + C_2 \mathbf{y}^2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

3. Geben Sie ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung an

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

Lösung: (9 Punkte)

Berechnung der Eigenwerte

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \implies \lambda_{1/2} = 2 \pm i.$$

Berechnung des Eigenvektors und des Lösungsvektors zu $\lambda_1 = 2 + i$

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}_2) \mathbf{u}^1 = \mathbf{0} \implies \begin{pmatrix} -(1+i) & 1 \\ -2 & (1-i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrix besitzt den Rang 1. Damit ist eine Variable des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -(1+i)u_{11} + u_{21} &= 0 \\ -2u_{11} + (1-i)u_{21} &= 0 \end{aligned}$$

frei wählbar. Setzt man $u_{11} = 1$, so erhält man $u_{21} = 1 + i$ und den Eigen- bzw. Lösungsvektor

$$\mathbf{u}^1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \implies \mathbf{u}^1 = \mathbf{x}^1 + i\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\mathbf{z}^1(t) = \mathbf{u}^1 e^{(2+i)t} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{2t} (\cos t + i \sin t)$$

eine komplexe Lösung des Systems.

Aufstellen eines Fundamentalsystems und der allgemeinen Lösung

$$\mathbf{y}^1(t) = \operatorname{Re} \mathbf{z}^1 = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t \right)$$

$$\mathbf{y}^2(t) = \operatorname{Im} \mathbf{z}^1 = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t \right)$$

$$\mathbf{y}_a^h(t) = C_1 \mathbf{y}^1(t) + C_2 \mathbf{y}^2(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

4. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y_1' = 2y_1 + y_2$$

$$y_2' = -y_1 + 4y_2$$

mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 2$.

Lösung: (12 Punkte)

Berechnung der Eigenwerte

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \implies \lambda_1 = 3, s_1 = 2.$$

Berechnung der Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 3$

$$r_1 = r(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}_2) = r \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \implies m_1 = n - r_1 = 2 - 1 = 1 < s_1 = 2.$$

Es gibt weniger linear unabhängige Eigenvektoren als zur Konstruktion eines Fundamentalsystems erforderlich sind. Deshalb ist der Lösungssatz (3.9) aus dem Vorlesungsskript für $s_1 = 2$ und $m_1 = 1$ zu verwenden.

Lösungsansatz

Da ein Fundamentalsystem für das gegebene System aus zwei Lösungsvektoren besteht, liefert der Lösungsansatz sofort die allgemeine Lösung.

$$\mathbf{y}_a^h(t) = (\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2 t) e^{3t} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_{11} + v_{12}t)e^{3t} \\ (v_{21} + v_{22}t)e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Die erste Ableitung lautet

$$(\mathbf{y}_a^h(t))' = ((\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2 t) e^{3t})' = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} v_{12} \\ e^{3t} v_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3(v_{11} + v_{12}t)e^{3t} \\ 3(v_{21} + v_{22}t)e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Einsetzen von $y_1(t), y_2(t), y_1'(t)$ und $y_2'(t)$ in das Differenzialgleichungssystem ergibt

$$\begin{aligned} 3v_{11} + v_{12} + 3v_{12}t - 2v_{11} - 2v_{12}t - v_{21} - v_{22}t &= 0 \\ 3v_{21} + v_{22} + 3v_{22}t + v_{11} + v_{12}t - 4v_{21} - 4v_{22}t &= 0. \end{aligned}$$

Nach Koeffizientenvergleich bei gleichen t -Potenzen erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} v_{11} + v_{12} - v_{21} &= 0 \\ v_{11} &- v_{21} + v_{22} = 0 \\ v_{12} &- v_{22} = 0 \\ v_{12} &- v_{22} = 0, \end{aligned}$$

dessen Koeffizientenmatrix den Rang 2 besitzt. Folglich sind zwei Variable frei wählbar. Während $v_{11} = C_1$ und $v_{12} = C_2$. Dann ist $v_{21} = C_1 + C_2$ und $v_{22} = C_2$. Einsetzen der berechneten Werte in den Lösungsansatz liefert

$$\mathbf{y}^h(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_1 + C_2 t)e^{3t} \\ (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Lösung des Anfangswertproblems

Einsetzen der Anfangsbedingungen ergibt

$$\begin{aligned} y_1(0) &= C_1 = 1 && \implies C_1 = 1 \\ y_2(0) &= C_1 + C_2 = 2 && \implies C_2 = 1 \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)e^{3t} \\ (2+t)e^{3t} \end{pmatrix}.$$

5. Zusatzaufgabe für Fans (Bearbeitung freiwillig)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Lösung (10 Punkte)

Berechnung der Eigenwerte

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 6 & -11 & (6-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2(6-\lambda) + 6 - 11\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0.$$

Daraus erhält man die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

Berechnung der Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 1 \quad (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}_3) \mathbf{x}^1 = \mathbf{0} \implies \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{r} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \end{array} \implies r(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}_3) = 2. \text{ Wählen } x_{11} = 1 \implies \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 2 \quad (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}_3) \mathbf{x}^2 = \mathbf{0} \implies \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & -11 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & -11 & 4 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 4 \end{array} \implies r(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}_3) = 2. \text{ Wählen } x_{12} = 1 \implies \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_3 = 3 \quad (\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{E}_3) \mathbf{x}^3 = \mathbf{0} \implies \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ccc} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & -11 & 3 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -9 & 3 \end{array} \implies r(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{E}_3) = 2. \text{ Wählen } x_{13} = 1 \implies \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Allgemeine Lösung

Die Lösungsvektoren $\mathbf{y}^1(t) = \mathbf{x}^1 e^t$, $\mathbf{y}^2(t) = \mathbf{x}^2 e^{2t}$, $\mathbf{y}^3(t) = \mathbf{x}^3 e^{3t}$ bilden ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems. Die allgemeine Lösung lautet

$$\mathbf{y}_a^h(t) = C_1 \mathbf{y}^1(t) + C_2 \mathbf{y}^2(t) + C_3 \mathbf{y}^3(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Lösung des Anfangswertproblems

$$\mathbf{y}(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 9 & 15 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 11 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \implies C_3 = 1, \quad C_2 = 1, \quad C_1 = 2.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} e^{3t}.$$