

**Hausaufgabe 2: Differenzialgleichungen  $n$ -ter Ordnung****Lösungen**

1. Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichungen an:

a)  $y'' + y' - 2y = 0,$

b)  $2y'' - 5y' + 2y = 0,$

c)  $y'' - 4y' + 5y = 0,$

d)  $y^{(4)} - y = 0,$

e)  $y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$

**Lösung:** (15 Punkte)

a)  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2 \implies y_a^h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}.$

b)  $\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1 = 0 \implies \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \implies y_a^h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{\frac{1}{2}t},$

c)  $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \implies \lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i \implies y_a^h(t) = C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t,$

d)  $\lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \implies \lambda_{1/2} = \pm 1 \quad \lambda_{3/4} = \pm i \implies$

$$y_a^h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t,$$

e)  $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \implies \lambda_1 = i, \quad s_1 = 2; \quad \lambda_2 = -i, \quad s_2 = 2 \implies$

$$y_a^h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 t \cos t + C_4 t \sin t.$$

2. Lösen Sie die inhomogene lineare Differenzialgleichung  $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$  mittels Konstantenvariation und führen Sie die Probe aus.

**Lösung:** (10 Punkte)

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \implies \lambda = 1, s = 2 \implies y_a^h(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t.$$

Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

Konstantenvariation: Ansatz:  $y_s^{inh}(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)t e^t$  Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C_1'(t) e^t + C_2'(t) t e^t &= 0 \\ C_1'(t) e^t + C_2'(t) e^t(1+t) &= \frac{e^t}{t}. \end{aligned}$$

Man erhält  $C_1'(t) = -1$  und  $C_2'(t) = \frac{1}{t}$ , also  $C_1(t) = -t$  und  $C_2(t) = \ln|t|$  und  $y_s^{inh}(t) = -t e^t + t \ln|t| e^t,$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_a^{inh}(t) = y_a^h(t) + y_s^{inh}(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t - t e^t + t \ln|t| e^t = C_1 e^t + D_2 t e^t + t \ln|t| e^t.$$

mit  $D_2 = C_2 - 1$ .

Probe:

$$y(t) = C_1 e^t + D_2 t e^t + t \ln |t| e^t$$

$$y'(t) = C_1 e^t + D_2 (1+t) e^t + \ln |t| e^t + e^t + t \ln |t| e^t$$

$$y''(t) = C_1 e^t + D_2 (2+t) e^t + \frac{e^t}{t} + 2 \ln |t| e^t + 2e^t + t \ln |t| e^t.$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung liefert

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \frac{e^t}{t}.$$

3. Lösen Sie die Anfangswertprobleme für die homogenen linearen Differenzialgleichungen

a)  $y'' + \omega_0^2 y = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0,$

b)  $y'' + 2\delta y' + \omega_0^2 y = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0$  für  $\delta \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \omega_0$ .

**Lösung:** (20 Punkte)

a) Die Anfangsbedingungen charakterisieren eine Auslenkung ohne Anstoß.

Allgemeine Lösung:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \implies \lambda_{1/2} = \pm i \omega_0 \implies$$

$$\begin{aligned} y_a^h(t) &= C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \\ (y_a^h(t))' &= -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t. \end{aligned}$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(0) = C_1 = y_0, \quad y'(0) = C_2 \cdot \omega_0 = 0 \implies C_1 = y_0, \quad C_2 = 0 \implies y(t) = y_0 \cos \omega_0 t.$$

b) Die Anfangsbedingungen charakterisieren eine Auslenkung ohne Anstoß.

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \implies \lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Es sind drei Fälle zu unterscheiden.

**Fall 1:** Starke Dämpfung für  $\delta > \omega_0$  (**Kriechfall**)

Wir setzen  $\Omega = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ . Offensichtlich gilt  $\Omega < \delta$ . Für  $\delta > \omega_0$  gibt es zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen der charakteristischen Gleichung:  $\lambda_1 = -\delta + \Omega < 0$  und  $\lambda_2 = -\delta - \Omega < 0$ , wobei  $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\Omega$  gilt. Die allgemeine Lösung und ihre 1. Ableitung lauten

$$\begin{aligned} y_a^h(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\ (y_a^h(t))' &= \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Lösung des Anfangswertproblems:

Aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = y_0 \\ y'(0) &= C_1 \cdot \lambda_1 + C_2 \cdot \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

erhält man  $C_1 = -\frac{y_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$  und  $C_2 = \frac{y_0 \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$ . Dann ist  $y(t) = \frac{y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (-\lambda_2 e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_2 t})$  die Lösung des Anfangswertproblems.

**Fall 2:** Mittlere Dämpfung für  $\delta = \omega_0$  (**aperiodischer Grenzfall**)

Für  $\delta = \omega_0$  gibt es eine reelle Lösung der Vielfachheit 2 der charakteristischen Gleichung:  $\lambda_1 = -\delta < 0$ . Die allgemeine Lösung und ihre 1. Ableitung lauten nun

$$\begin{aligned} y_a^h(t) &= (C_1 + C_2 t)e^{-\delta t} \\ (y_a^h(t))' &= C_2 e^{-\delta t} - \delta(C_1 + C_2 t)e^{-\delta t}. \end{aligned}$$

Aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 &= y_0 \\ y'(0) &= C_1 \cdot (-\delta) + C_2 &= 0 \end{aligned}$$

erhält man  $C_1 = y_0$  und  $C_2 = y_0 \delta$ . Dann ist  $y(t) = y_0(1 + \delta t)e^{-\delta t}$  die Lösung des Anfangswertproblems.

**Fall 3:** Schwache Dämpfung für  $\delta < \omega_0$  (**Schwingfall**)

Wir setzen  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ . Für  $\delta < \omega_0$  gibt es ein Paar zueinander konjugiert komplexer Lösungen der **charakteristischen Gleichung**:  $\lambda_1 = -\delta + i\omega$  und  $\lambda_2 = -\delta - i\omega$ . Die allgemeine Lösung und ihre 1. Ableitung lauten jetzt

$$\begin{aligned} y_a^h(t) &= e^{-\delta t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \\ (y_a^h(t))' &= -\delta e^{-\delta t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \\ &\quad + e^{-\delta t}(-\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t). \end{aligned}$$

Aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 &= y_0 \\ y'(0) &= C_1 \cdot (-\delta) + C_2 \cdot \omega &= 0 \end{aligned}$$

erhält man  $C_1 = y_0$  und  $C_2 = \frac{y_0 \delta}{\omega}$ .

Somit ist  $y(t) = y_0 e^{-\delta t}(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t)$  die Lösung des Anfangswertproblems.

4. Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $y'' = 1$  an. Untersuchen Sie das Anfangswertproblem mit den Anfangsbedingungen  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  sowie das Randwertproblem unter folgenden Randbedingungen

a)  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$ ,

b)  $y'(1) = 1$ ,  $y'(2) = 2$ ,

c)  $y'(1) = 1$ ,  $y'(2) = 1$ .

**Lösung:** (8 Punkte)

Die allgemeine Lösung und ihre erste Ableitung erhält man durch Integration:

$$\begin{aligned} y_a^{inh}(t) &= C_1 t + C_2 + \frac{t^2}{2} \\ (y_a^{inh}(t))' &= C_1 + t. \end{aligned}$$

Es gilt:  $y(0) = C_2$ ,  $y'(0) = C_1$ ,  $y(1) = C_1 + C_2 + \frac{1}{2}$ ,  $y'(1) = C_1 + 1$ ,  $y'(2) = C_1 + 2$ .

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(0) = C_2 = 1, \quad y'(0) = C_1 = 0 \implies y(t) = 1 + \frac{t^2}{2}.$$

Lösung der Randwertprobleme

a)  $y(0) = C_2 = 0, \quad y(1) = C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 1 \implies C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{1}{2}.$

Das Randwertproblem hat die eindeutige Lösung  $y(t) = \frac{1}{2}(t + t^2).$

b)  $y'(1) = C_1 + 1 = 1, \quad y'(2) = C_1 + 2 = 2 \implies C_1 = 0, \quad C_2 \text{ beliebig.}$

Das Randwertproblem hat unendlich viele Lösungen  $y(t) = C_2 + \frac{t^2}{2}.$

c)  $y'(1) = C_1 + 1 = 1, \quad y'(2) = C_1 + 2 = 1 \implies$  Das Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

Das Randwertproblem ist unlösbar.

5. Lösen Sie das Anfangswertproblem für die folgende inhomogene lineare Differenzialgleichung  $y'' + 2y' + 2y = t e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

**Lösung:** (10 Punkte)

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \implies \lambda_{1/2} = -1 \pm i \implies y_a^h(t) = C_1 e^{-t} \cos t + C_2 e^{-t} \sin t.$$

Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

Störgliedansatz:  $\gamma = -1$  ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ . Deshalb Ansatz  $y_s^{inh}(t) = e^{-t}(Q_1 t + Q_0)$ . Die Ableitungen lauten

$$(y_s^{inh}(t))' = e^{-t}(Q_1 - (Q_1 t + Q_0)) \quad (y_s^{inh}(t))'' = e^{-t}(-2Q_1 + (Q_1 t + Q_0))$$

Nach Einsetzen in die inhomogene Gleichung erhält man

$$[(-2Q_1 + (Q_1 t + Q_0)) + 2(Q_1 - (Q_1 t + Q_0)) + 2(Q_1 t + Q_0)]e^{-t} = t e^{-t}.$$

Koeffizientenvergleich bei gleichen  $t$ -Potenzen ergibt  $Q_0 = 0$  und  $Q_1 = 1$  und somit die spezielle Lösung  $y_s^{inh}(t) = t e^{-t}.$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_a^{inh}(t) = y_a^h(t) + y_s^{inh}(t) = C_1 e^{-t} \cos t + C_2 e^{-t} \sin t + t e^{-t}.$$

Ihre Ableitung hat die Form:

$$(y_a^{inh}(t))' = -C_1 e^{-t} \cos t - C_2 e^{-t} \sin t - C_1 e^{-t} \sin t + C_2 e^{-t} \cos t + e^{-t} - t e^{-t}.$$

Lösung des Anfangswertproblems:

Einsetzen der Anfangsbedingungen in die letzten beiden Ausdrücke ergibt  $y(0) = 0 = C_1$  und  $y'(0) = 0 = -C_1 + C_2 = -1$ , also  $C_1 = 0$  und  $C_2 = -1$  und damit die Lösung des Anfangswertproblems in der Form  $y(t) = e^{-t}(t - \sin t).$

6. Lösen Sie das Randwertproblem  $y'' - y = 2t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = -1$ .

**Lösung:** (7 Punkte)

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda_{1/2} = \pm 1, \implies y_a^h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

Störgliedansatz:  $y_s^{inh}(t) = Q_1 t + Q_0$ . Die Ableitungen lauten  $(y_s^{inh}(t))' = Q_1$  und  $(y_s^{inh}(t))'' = 0$ . Einsetzen in die inhomogene Gleichung liefert  $-(Q_1 t + Q_0) = 2t$ , also  $Q_0 = 0$  und  $Q_1 = -2$ . Damit hat die spezielle Lösung die Form  $y_s^{inh}(t) = -2t$ .

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_a^{inh}(t) = y_a^h(t) + y_s^{inh}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 2t.$$

Lösung des Randwertproblems:

Einsetzen der Randbedingungen in den letzten Ausdruck ergibt ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von  $C_1$  und  $C_2$

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 0 \\ y(1) &= C_1 e + C_2 e^{-1} - 2 = -1. \end{aligned}$$

Man erhält  $C_1 = \frac{1}{e - e^{-1}}$  und  $C_2 = -\frac{1}{e - e^{-1}}$ . Daraus ergibt sich die Lösung des Randwertproblems  $y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}} - 2t$ .

7. **Zusatzaufgabe für Fans** (Bearbeitung freiwillig)

Eine Bakterienpopulation wachse nach dem Gesetz  $P(t) = Ce^{kt}$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  seien 1000 Bakterien vorhanden, nach 5 Minuten 5000. Nach wieviel Minuten hat sich die Bakterienpopulation in Bezug auf den Anfangszeitpunkt verzehnfacht?

HINWEIS: Verwenden Sie Aufg. 6 HA 1.

**Lösung:** (5 Punkte)

Einsetzen der Ab  $P(0) = 1000$  in die allgemeine Lösung  $P(t) = Ce^{kt}$  liefert  $P(t) = 1000e^{kt}$  (direktes Problem).

Zur Bestimmung der Wachstumskonstante  $k > 0$  wird die Information  $P(5) = 5000$  verwendet (inverses Problem). Es ist

$$P(5) = 5000 = 1000e^{k5} \implies k = \frac{\ln 5}{5} \implies P(t) = 1000 \left( e^{\ln 5} \right)^{\frac{t}{5}} \implies P(t) = 1000(5^{\frac{t}{5}}).$$

Für  $P(t) = 10000$  erhält man

$$10000 = 1000(5^{\frac{t}{5}}) \implies \ln 10 = \ln 5^{\frac{t}{5}} = \frac{t}{5} \ln 5 \implies t = 5 \frac{\ln 10}{\ln 5} = 7.1534.$$

Nach reichlich 7 Minuten hat sich die Bakterienpopulation verzehnfacht.