Hausaufgabe 1: Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Lösungen

1. In geringer Höhe h über der Erdoberfläche gilt für die Geschwindigkeit der Abnahme des Luftdruckes p unter Vernachlässigung der Gravitationskräfte und bei konstanter Temperatur die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = -\frac{\rho_0}{p_0}\, g\, p.$$

Dabei bezeichnen p_0 bzw. ρ_0 den Druck bzw. die Dichte der Luft in der Höhe $h = 0$ und g die Erdbeschleunigung. Bestimmen Sie eine Funktion $p = p(h)$, die die Bedingung $p(0) = p_0$ erfüllt und welche die Abhängigkeit des Luftdruckes von der Höhe beschreibt.

Lösung: (5 Punkte)

Es liegt ein Anfangswertproblem mit der Anfangsbedingung $p(0) = p_0$ für eine gewöhnliche Differenzialgleichung 1. Ordnung mit trennbaren Variablen vor. Nach der Methode der Variablentrennung folgt aus der Ausgangsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0}\, g\, \mathrm{d}h.$$

Hieraus erhält man durch Integration

$$\ln\left|\frac{p}{C}\right| = -\frac{\rho_0}{p_0}\, g\, h$$

und nach dem Entlogarithmieren

$$p = p(h) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{\rho_0}{p_0} g\, h}.$$

Die Anfangsbedingung liefert $C = p_0$. Man erhält als Abhängigkeitsgesetz des Luftdruckes von der Höhe

$$p = p(h) = p_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\rho_0}{p_0} g\, h} \qquad \text{(barometrische Höhenformel).}$$

2. In einem Behälter befinden sich 100 l einer Lösung, die 10 kg Salz enthält. In den Behälter fließt stetig Wasser zu (5 l/min), welches sich gleichmäßig mit der Lösung vermischt. Das Gemisch fließt mit einer Geschwindigkeit von 5 l/min wieder aus. Wie viel Salz ist nach einer Stunde im Behälter?

Lösung: (7 Punkte)

Es sei $y(t)$ die Salzmenge zum Zeitpunkt t in kg. Die pro Minute ausfließende Gemischmenge u ist bestimmt durch die Proportion $\frac{100}{y(t)} = \frac{5}{u}$, also $u = \frac{5}{100}y(t) = \frac{1}{20}y(t)$. Die pro Δt Minuten ausfließende Gemischmenge beträgt dann $u\Delta t = \frac{1}{20}y(t)\Delta t$.

Die Salzmenge zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ setzt sich zusammen aus der Salzmenge zum Zeitpunkt t, wovon die ausfließende Gemischmenge abgezogen werden muss. Die Bilanzgleichung lautet

$$y(t+\Delta t) = y(t) - \frac{1}{20}y(t)\Delta t.$$

Nach Grenzübergang erhält man die Differenzialgleichung

$$y'(t) + \frac{1}{20}y(t) = 0,$$

welche die allgemeine Lösung $y(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}t}$ besitzt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $y(0) = 10$ kg. Aus dieser Anfangsbedingung ergibt sich $C = 10$ und die spezielle Lösung $y(t) = 10\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}t}$. Nach 60 Min. sind $y(60) = 10\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}60} = 10\mathrm{e}^{-3} \approx 0,5$ kg Salz im Behälter.

3. Lösen Sie die Differenzialgleichungen

a) $y' + t^2 y = 0,$ b) $y' = y\tan t,$

c) $y' = (y-9)\cos t,$ d) $y' - 3\,\dfrac{y}{t} = t.$

Lösung: (14 Punkte)

Es sind jeweils die allgemeinen Lösungen anzugeben.

a) Es liegt eine lineare homogene DGL vor (Spezialfall einer DGL mit trennbaren Variablen):

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -t^2 y \implies \frac{\mathrm{d}y}{y} = -t^2\,\mathrm{d}t \implies \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\frac{t^3}{3} \implies |y| = |C|\,\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}}.$$

Sei $C > 0$. Für $y > 0$ ist $y = C\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}}$, für $y < 0$ ist $y = -C\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}}$. Dies ist gleichbedeutend mit $y = C\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}}$ für $C < 0$.

Sei $C < 0$. Für $y < 0$ ist $y = C\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}}$, für $y > 0$ ist $y = -C\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}}$. Dies ist gleichbedeutend mit $y = C\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}}$ für $C > 0$.

Auf Grund der Beliebigkeit der Integrationskonstanten C können also die Betragszeichen weggelassen werden.

Die allgemeine Lösung lautet $y_a(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}}$. Für $C = 0$ ist $y = 0$ ebenfalls Lösung.

b) Es liegt eine lineare homogene DGL vor (Spezialfall einer DGL mit trennbaren Variablen):

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y\tan t \implies \frac{\mathrm{d}y}{y} = \tan t\,\mathrm{d}t = \frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t \implies \\ \ln\left|\frac{y}{C}\right| &= -\ln|\cos t| = \ln|\cos t|^{-1} \implies y_a(t) = \frac{C}{\cos t}. \end{aligned}$$

Auf Grund der Beliebigkeit der Integrationskonstanten C können die Betragszeichen weggelassen werden.

c) Die DGL kann sowohl als DGL mit trennbaren Variablen als auch als lineare inhomogene DGL aufgefasst werden. Lösung mittels Variablentrennung:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (y-9)\cos t \implies \frac{\mathrm{d}y}{y-9} = \cos t\,\mathrm{d}t \implies \\ \ln\left|\frac{y-9}{C}\right| &= \sin t \implies y - 9 = C\mathrm{e}^{\sin t} \implies y_a(t) = 9 + C\mathrm{e}^{\sin t}. \end{aligned}$$

d) Es liegt eine lineare inhomogene DGL vor.

Allgemeine Lösung der homogenen DGL $y' - 3\,\dfrac{y}{t} = 0$:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3\,\frac{y}{t} \implies \frac{\mathrm{d}y}{y} = 3\frac{\mathrm{d}t}{t} \implies \ln\left|\frac{y}{C}\right| = 3\ln|t| = \ln|t|^3 \implies y_a^h(t) = Ct^3.$$

Berechnung einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL mittels Konstantenvariation:
Ansatz: $y_s^{inh}(t) = C(t)\,t^3 \qquad (y_s^{inh}(t))' = C'(t)\,t^3 + 3C(t)\,t^2.$
Einsetzen in inhomogene Gleichung liefert

$$C'(t)\,t^3 + 3C(t)\,t^2 - \frac{3C(t)\,t^3}{t} = t \implies C'(t)\,t^3 = t \implies C(t) = -\frac{1}{t} \implies y_s^{inh}(t) = -t^2.$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y_a^{inh}(t) = y_s^{inh}(t) + y_a^h(t) = -t^2 + C\,t^3.$$

4. Lösen Sie die Anfangswertprobleme
a) $3y^2y' + 16t = 2t\,y^3, \qquad y(0) = 1,$

b) $y' + 2t\,y = 2t^2 \mathrm{e}^{-t^2}, \qquad y(0) = 1.$

Lösung: (16 Punkte)
a) Es liegt eine DGL mit trennbaren Variablen vor.
Berechnung der allgemeinen Lösung:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{2t\,(y^3-8)}{3y^2} \implies \frac{3y^2}{y^3-8}\,\mathrm{d}y = 2t\,\mathrm{d}t \implies \\ \ln\left|\frac{y^3-8}{C}\right| &= t^2 \implies y^3 - 8 = C\,\mathrm{e}^{t^2} \implies y_a(t) = \sqrt[3]{8 + C\,\mathrm{e}^{t^2}}. \end{aligned}$$

Lösung des AWP:

$$y(0) = 1 = \sqrt[3]{8 + C\cdot 1} \implies 8 + C = 1^3 \implies C = -7 \implies y(t) = \sqrt[3]{8 - 7\,\mathrm{e}^{t^2}}.$$

b) Es liegt ein AWP für eine lineare inhomogene DGl vor.
Berechnung der allgemeinen Lösung der homogenen DGl:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2ty \implies \frac{\mathrm{d}y}{y} = -2t\,\mathrm{d}t \implies \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -t^2 \implies y_a^h(t) = C\,\mathrm{e}^{-t^2}.$$

Berechnung einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL mittels Konstantenvariation:

$$y_s^{inh}(t) = C(t)\,\mathrm{e}^{-t^2} \qquad (y_s^{inh}(t))' = C'(t)\,\mathrm{e}^{-t^2} - 2t\,C(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}.$$

Einsetzen in inhomogene Gleichung liefert

$$C'(t)\,\mathrm{e}^{-t^2} - 2t\,C(t)\,\mathrm{e}^{-t^2} + 2tC(t)\,\mathrm{e}^{-t^2} = 2t^2\,\mathrm{e}^{-t^2} \implies C'(t) = 2t^2 \implies C(t) = \frac{2}{3}t^3$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y_a^{inh}(t) = y_s^{inh}(t) + y_a^h(t) = \frac{2}{3}t^3\,\mathrm{e}^{-t^2} + C\,\mathrm{e}^{-t^2}.$$

Lösung des AWP:

$$y(0) = 1 = C\cdot 1 \implies C = 1 \implies y(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 + 1\right)\mathrm{e}^{-t^2}.$$

5. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Menge N_0 einer radioaktiven Substanz vorhanden. Nach 30 Tagen sind 50 % der Ausgangsmenge N_0 zerfallen. Nach wie viel Tagen ist noch 1 % von N_0 vorhanden?

   HINWEIS: Verwenden Sie die Beispiele 1.4 und 1.11 aus dem Vorlesungsskript.

   Lösung: (8 Punkte)

   Gemäß Vorlesungsskript Beispiel 1.4 genügt der beschriebene Prozess der Differenzialgleichung $N'(t) = -kN(t)$. Mit der Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ erhält man ein Anfangswertproblem, welches die Lösung $N(t) = N_0 e^{-kt}$ besitzt (Lösung des direkten Problems). Zur Bestimmung von k ist ein inverses Problem zu lösen. Die Bedingung, dass nach 30 Tagen 50 % der Ausgangsmenge zerfallen ist, liefert zur Ermittlung von k die Gleichung $\dfrac{N_0}{2} = N_0 e^{-k30}$, woraus $k = \dfrac{\ln 2}{30}$ folgt. Einsetzen von k in die Lösung des direkten Problems ergibt $N(t) = N_0 2^{-\frac{t}{30}}$. Aus der Gleichung $0{,}01 N_0 = N_0 2^{-\frac{t}{30}}$ erhält man $t = 199{,}32 \approx 200$. Nach etwa 200 Tagen ist noch 1 % der Ausgangsmenge N_0 vorhanden.

6. Eine Bakterienpopulation befinde sich in einer Nährlösung und habe zur Zeit t die Größe $P(t)$. Nach Ablauf des Zeitintervalls Δt hat sie sich um $\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t)$ Bakterien vermehrt.

   Annahme: Bei kleinen Zeitspannen Δt sei die Vermehrung ΔP proportional zum Anfangsbestand $P(t)$ und zum Zeitintervall Δt.

   Stellen Sie eine Differenzialgleichung auf, die das Wachstumsgesetz der Bakterienpopulation beschreibt, und geben Sie die allgemeine Lösung an.

   Lösung: (6 Punkte)

   Es gilt nach Voraussetzung: $P(t+\Delta t) - P(t) \sim P(t)\,\Delta t$. Mit einem Proportionalitätsfaktor $k > 0$ ist

   $$P(t+\Delta t) - P(t) = kP(t)\,\Delta t.$$

   Durch Grenzübergang erhält man $P'(t) = kP(t)$ (allgemeine Lösung: $P(t) = Ce^{kt}$).

7. Die vereinfachte CLAUSIUS-CLAPEYRONsche Differenzialgleichung, die den Übergang eines Stoffes von einem Aggregatzustand zum anderen beschreibt, hat die Form

   $$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda\, p}{RT^2}.$$

   Dabei bezeichnet λ die spezifische Umwandlungswärme des Phasenüberganges, R die allgemeine Gaskonstante, p den Druck und T die (absolute) Temperatur. Geben Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung an und lösen Sie das Anfangswertproblem mit der Anfangsbedingung $p(T_0) = p_0$.

   Lösung: (4 Punkte)

   Die Methode der Variablentrennung liefert

   $$\frac{dp}{p} = \frac{\lambda}{R}\frac{dT}{T^2} \implies \ln|p| = -\frac{\lambda}{R}\frac{1}{T} + \ln|C| \implies \ln\left|\frac{p}{C}\right| = -\frac{\lambda}{R}\frac{1}{T}.$$

   Entlogarithmieren ergibt die allgemeine Lösung $p(T) = C e^{-\frac{\lambda}{RT}}$. Einsetzen der Anfangsbedingung in die allgemeine Lösung liefert die spezielle Lösung, die durch den Punkt (T_0, p_0) hindurchgeht $p(T) = p_0 e^{-\frac{\lambda}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)}$.

8. **Zusatzaufgabe für Fans** (Bearbeitung freiwillig)

Bestimmen Sie alle Kurven mit der Eigenschaft, dass der Flächeninhalt A eines Trapezes, welches von den Koordinatenachsen, der Tangente im Berührungspunkt und der Ordinate des Berührungspunktes gebildet wird, den konstanten Wert $A = 3\,d^2$ besitzt.

HINWEIS: Der Flächeninhalt eines Trapezes mit den parallelen Seiten a, b und der Höhe h ist $A = \frac{1}{2}(a+b)h$, also gilt $\frac{1}{2}(a+b)h = 3d^2$.

Lösung: (10 Punkte)

Es sei $M = (t, y)$ der Berührungspunkt von Tangente und Kurve. Dann gilt $h = t$ und $b = y$.

Der Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse hat die Koordinaten $(0, a)$. Wir drücken a durch die in die Tangentengleichung im Punkt (t, y) eingehenden Größen aus. Die Tangentengleichung im Punkt (t, y) schreiben wir in der Form $u - y = y'(z - t)$ und bestimmen den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ordinatenachse. Er besitzt die Koordinaten $z = 0$ und $u = a$. Wir setzen in der Tangentengleichung $z = 0$ und $u = a$.

Dann ist $a = y - y'\,t$ und man erhält die Differenzialgleichung $\frac{1}{2}(y - y'\,t + y)t = 3d^2$. Für $t \neq 0$ ist $y' - \frac{2}{t}y = -\frac{6d^2}{t^2}$. Dies ist eine lineare inhomogene Differenzialgleichung 1. Ordnung mit $a_0(t) = -\frac{2}{t}$ und $g(t) = -\frac{6d^2}{t^2}$.

Lösung der homogenen Gleichung: $y' - \frac{2}{t}y = 0 \implies y_a^h(t) = Ct^2$ (vgl. Aufg. 3d)).

Lösung der inhomogenen Gleichung mithilfe der Lösungsformel:

$$y_a^{inh}(t) = t^2(-6d^2)\int \frac{\mathrm{d}t}{t^4} + y_a^h(t) = \frac{2d^2}{t} + Ct^2.$$

Lösung der inhomogenen Gleichung mittels Konstantenvariation: Ansatz

$$y_s^{inh} = C(t)t^2 \implies (y_s^{inh})' = C'(t)t^2 + C(t)2t \qquad (y_s^h = t^2).$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung liefert

$$\begin{aligned} C'(t)\,t^2 + C(t)\,2t - \frac{2}{t}C(t)\,t^2 &= -\frac{6d^2}{t^2} \\ \implies C'(t) = -\frac{6d^2}{t^4} \implies C(t) &= \frac{2\mathrm{d}^2}{t^3}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$y_s^{inh}(t) = \frac{2d^2}{t} \quad \text{und} \quad y_a^{inh}(t) = y_s^{inh}(t) + y_a^h(t) = \frac{2d^2}{t} + Ct^2.$$

Für $C = 0$ erhält man eine Hyperbel.